名古屋学院大学論集　人文・自然科学篇　第 44 巻　第 2 号（2008 年 1 月）

新たなる認識論理の構築

――古典論理のベースとしての認識論理――

鈴　木　啓　司

始めに

本稿は「新たなる認識論理の構築」の総題のもとに書き継がれている一連の論文[1]の三番目に当たる。既発表の前二稿で，著者は，古典論理の拡張系である様相論理の一つとしての従来の認識論理のあり方に異議を唱えてきた。それは一言で要約すれば，認識とは人間にとり，古典論理的に計算できるよりもっと根本的な精神活動であろうということである。現在の認識論理の，おもに情報科学系での目覚しい応用成果は特筆に価するものだが，あえて言わせてもらえば，プラトン以来の伝統を誇る哲学の一分野であるエピステモロジーは，現在，情報理論に堕してしまっている。そこでは，誰かが何らかの形で知っていることのみ扱われ，誰も知らないがこれから知りうることは問題の埒外である。プラトンの『メノン』に，有名な以下の「探求のパラドクス」というものが出てくる。

「人間は，自分が知っているものも知らないものも，これを探求することはできない。というのは，まず，知っているものを探求するということはありえないだろう。なぜなら，知っているのだし，ひいてはその人には探求の必要がまったくないわけだから。また，知らないものを探求するということもありえないだろう。なぜならその場合は，何を探求すべきかということも知らないはずだから」[2]。

この「論争家ごのみの議論」に対し，作中人物ソクラテスは異議を唱えるのである。その内容はここではおくとして，著者が実現を夢見るのは，人間が知らないことを知る過程，ひいては古典論理を含めた人間の認識世界の発生の仕組みを論理に取り込むことである。すなわち，認識論理をあらゆる論理の基礎におくことである。それは非常に実現困難な課題であることは承知しているが，その達成の如何に関わらず，著者には，現在の認識論理のあり方では人間の認識を（いくぶんなりとも）形式化することはできないとの確信がある。その好例が，前二稿から話題にしている「共有知識」で，これはいまだ決定的な形式化の成果を見ていない。それは，著者が考えるに，共有知識こそ，従来の一エージェント型の認識論ではなく，複数エージェントに基礎を置く本来の認識の発生過程を示しているからである。新たなる認識論理構築の鍵は，新たなる共有知識の形式化にあると思われる。その見取り図を前稿では提示したわけだが，本稿ではそれにより具体的な形を与えるべく，新認識論理の定義する共有知識空間で古典論理を（現段階で可能な限り）再構成することを目指したいと思う。

重ね合わせの論理

話の取っ掛かりとしてまず，著者がかねがね抱いていた素朴な疑問から始めよう。論理学と算術に多くの共通点があることはブール代数

の例を見ても分かるが，たとえば，両者には分配則というものがある。論理学では，A∧(B∨C)↔(A∧B)∨(A∧C) と，A∨(B∧C)↔(A∨B)∧(A∨C) だ。これらは，前者は「積は和に対して分配可能」，後者は「和は積に対して分配可能」と読める。これを算術に当てはめると，前者は，a×(b+c)=(a×b)+(a×c)となって成立するが，後者は，a+(b×c)≠(a+b)×(a+c) となって成立しない。これはなぜなのか。論理学の教科書にはたいてい，積は論理と算術両者に共通だが，和は違うとしか書かれていない。違う理由までは書かれていないのである。これは，論理と算術の似て非なる部分によるのであろうが，それはどこなのか。論理の分配則を確かめるためには，中学の数学で習った集合に出てきたベン図を描けばよい。四角の中で複数の円が重なったり離れたりしている例のあれである。すると，A∩B(AとBの共通部分)，B∪C（BとCを合わせた部分）といった包含関係をたどって，上の分配則が二つとも成立するのが分かる。これは，論理和において円同士の重ね合わせが許されているおかげである。これに対し，算術の和算では，最小単位が重ねられることなく直線的に数えられていく。2+3なら，最初の点二つに続けて足される点を数えていけばよい。ここに両者の和算の違いがあり，ひいては分配則成立における違いの原因があるのである。その証拠に，論理のほうでも分離和（AとBの共通部分を除いた，すなわち重なった部分を除いた両者の和，いわゆる排他選言）では，和は積に対して分配可能ではない。これに対し，乗算では，算術においても重ね合わせが実現されている。2×3なら，点二つを横に並べたものを縦に三段重ねにした図で表現されようが，2と3は直線的に，言い換えれば同レベルで数えられるのではない。後者の3は言わば，二つのものが三つあるというふうに，一段高い次元（二次元）の概念として図に重ねられているのである。これにより，積は論理でも算術でも共通の法則に従うのである。

重ね合わせを表現することは，世界を説明せんとする理論（論理をもとに各分野で立てられた体系的考え）にとって重要である。というのも，世界の実質はどうあれ，われわれ人間の描く世界は多重的な意味の重なりによってできているからだ。だが他方，重なりはぶれや曖昧さの原因ともなる。算術は基本的に最小単位の重なりを認めないために，非常に手堅い安全確実なものである。そのために，局在的に一箇所一状態のデジタルコンピューターの基盤ともなっている。そこに重なりの表現力を加えたのが，上に少し触れた集合という考えである。集合Aの要素は，ときに集合Bの要素にもなりうる。こうして論理と算術は密接に結びつき，世界を広範囲に明晰に説明する力を得たといえよう。実際，集合の要素は数にとどまらない。任意の条件を備えた人，モノでもよい。それらは複数の条件を兼ね備えることで，同時に複数の集合の要素足りうる。そして，本論の主題である共有知識も，一種の重ね合わせの状態といえる意味で，集合論的形式化が定番となってきたのである。

共有知識とは，すでに何度も述べてきたように，「互いに知っていることを知っている」状態である。ルールを守りあう状況，一斉攻撃問題のケースなどに見られるように，協調行為の成立に重要なのは，自分がPという命題を知っていて，相手もこの命題を知っていて，なおかつ，このことを互いに知り合っている状態である。相手のことを知っている自分のことを相手は知っていて，またそのことを自分は知っていて，そしてその自分のことをまた相手は知って

いて...。この「知識の知識」の重なりが，協調行為に必要な信頼関係を生む。これを論理式で表すと，Cp（共有知識p）＝p∧E (everybody knows)p∧EEp∧EEEp∧EEEEp…というふうに，認識オペレーターの無限連鎖に陥った。この計算困難な厄介な問題を，現在，共有知識の形式化の定番となっているオーマンの方法(3)は，集合の包含関係に落とし込むことで解決した。すなわち，複数エージェントの認識オペレーターが何重にかかろうとも，その入れ子式になった集合の集合の核の部分が空集合でなければ，pはこれらエージェント間の共有知識となるのである。いわば，先述の式が上に向かって発散してしまうのに対して，オーマンの方法は，下への包含関係による収束値として共有知識を囲い込んだといえよう。

だが，これで本当に共有知識は形式化されたのだろうか。その疑問はすでに前二稿で触れておいた。オーマンの方法にしても無限の概念は潜在的に出てくる。ただ，無限を最も形式的に（完全にではない）扱えるのが，今のところ集合論であるということなのだ。しかし，集合論には境界条件をいかに設けるかという問題が常につきまとう（オーマンの場合，それは確率論における標本空間であった）。それをないがしろにすると，最終的には「すべての集合の集合」という例のパラドクスにぶち当たるわけである。境界とは集合の囲い込みである。集合の要素（今の場合，共有知識）を定義する場合，この境界設定が論点先取り的に定義をあらかじめ限定していないだろうか。集合論に頼る限り，この疑念を払拭しきれない気が著者にはどうしてもするのである。そこで，集合論に代わる新たな重ね合わせの理論を提出しようというのが次章の狙いである。

認識代数

オーマンの方法は，共有知識を集合代数に落とし込むものであった。ここでは，認識そのものを代数的に解釈することを試みてみる。それには，エージェントと命題（知識状態）を一体化して考える論理が基盤となるのであるが，その見取り図は不十分とはいえ，前稿で一応示しておいた。より体系化したシンタクスレベルの話は後述するとして，まずは，エージェントをさまざまに変容する知識状態として，変数x，y，zとおいてみよう。その∧（交わり）と∨（結び），演算記号でいうなら×と＋を認識論的に解釈してみる。xがyを知るということは，xとyの交わりとみて積で表す。xがyに加えてzを知ることは，xyとxzの結びとみて和で表す。すなわち，

x×y　　xはyを知る

x×(y+z)＝(x×y)+(x×z)　　xはyあるいはzを知る

これに加えて基本的な演算法則が認識論的に当てはまるか，解釈してみよう。上の二式のうち後者は，そのまま積の和に対する分配則である。では，和の積に対する分配則は成立するか。認識論的には成立しない。前稿でも触れたように，認識代数の基盤となる論理はエージェント＝知識状態とし，KiP（エージェントiは命題Pを知っている）を原子式とするため，係数のない項の和算は認められないからだ。すなわち，命題（項）は誰か（係数）に知られていなければ（掛けられていなければ）ならないのである。要するに，分配則に関しては算術と同じである。

交換則はどうか。実はこれが認識代数の大きな特徴なのであるが，乗算の交換則は成立しない。xがyを知っているからといって，それが

即，yがxを知っていることにはならない。すなわち，

$x \times y \neq y \times x$

和算は交換則が成立する。すなわち，

$xy + xz = xz + xy$

この乗算における交換則の不成立が，新たな重ね合わせ理論の土台となることを後に詳述する。

結合則はどうであろう。$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$　これは，「xはyを知っていて，かつzを知っている」ことは，「yはzを知っていて，それをxは知っている」と同値であると読める。これにはいろいろ解釈が別れるところがあろうが，交換則の不成立により認識代数式が左端の項の知識状態を表すものであるとするなら，xの知識状態としてはyもzも知っているという意味で同値と考え，結合則は成立するとみなしたい。和算に関しては，成立することは説明を要すまい。

以上，演算の基本法則について認識論的解釈を施したわけだが，要するに，乗算における交換則が成立しないところに，認識代数の特徴があるといえる。次に，集合の要素の関係について，同様の解釈を試みてみよう。集合論的重ね合わせを拒否するといったが，集合論をまったく否定するわけではない。数に関わる限り集合論抜きには考えられないわけで，いうなれば，集合概念の認識論的再解釈を提示しようというわけである。要素関係の代表的な性質は四つあり，反射性，推移性，対称性，反対称性である。反射性は$x \to x$というもので，集合論的には要素の離散性を保証する。すなわち，任意の要素が他の要素と区別できるということで，点集合の基本的性質である。これは認識論的には，他人と自分を区別できる自意識を表しているといえそうだが，実質はそう簡単ではない。これについてはまた後に触れる。個体の区別の必要上，とりあえず，この性質は認めておこう。次に，推移性は$x \to y \wedge y \to z \Rightarrow x \to z$というもので，xからyが言え，かつ，yからzが言えれば，xからzが言えるというものである。大小関係などはこれに相当する。知識も，結合則の成立が表しているように，xがyを知っていて，そのyがzを知っていれば，xはzも知っている。知識は推移的である。対称性は$x \to y \Rightarrow y \to x$で，これは交換則を許すものである。ゆえに，上の演算規則が示すように，知識は対称的ではない。これに対し，反対称性，$x \to y \wedge y \to x \Rightarrow x = y$は成立する。すなわち，xとyの交換が可能なのは，両者がまったく同値であるときに限るというものである。要するに，知識は反射性，推移性，反対称性を持つ半順序構造（要素間に$\leqq$関係が成立する集合）にモデル化できるわけである。

この代数モデルの中で共有知識を定義するのだが，そのデザインイメージは前稿で示しておいた。ここではそれをより代数的に形式化しよう。共有知識とは，複数エージェントが一つの同じ知識状態でありながら各アイデンティティーを保っている（互いに相手が知っていることを知っている）状態だ。この同じであり違うという二律背反状態を表す重ね合わせの方法が，困難な課題なのである。集合論的説明はその一つの回答だったわけであるが，結局，果てしなく続く入れ子状態という形で，無限の問題を根本的に回避するまでにはいたらなかった。それは，知識の反対称性（可換である場合は同一のものに限る）と，共有知識の対称性（違うもの同士の間でも同一の関係が成立する）を統一的にリンクさせて考える表現方法が，集合論には欠けていたからであると思われる。ここで今一度，対称性と反対称性を簡単に整理してお

くと，対称性はxとyの間に往復対がある関係である。すなわち，x⇆y。たとえば，2と4は，互いに偶数という関係で対称的である。反対称性は，xとyの間に片道対しかない関係である。すなわち，x→y。2と4は，大小関係でいうと反対称である。ただし，対称性と反対称性が両立する場合が一つだけある。それが，x＝yだ。ゆえに，集合論的に共有知識を表すとすると，すべての要素が同一の均一空間ということになろう。それは，いかに多くのエージェントで構成されていようとも，一つの要素だけでできた単一集合である。そこには各エージェントのアイデンティティーというものはない。しかし，これは一面で共有知識の性格を表しているといえる。確かにそこには同一の知識状態が成立しているからだ。だが，そこに個別のエージェント間の知識の共有という視点を導入する段になると，集合論は壁にぶち当たるのである。集合としてみた場合，対称的集合と反対称的集合はやはり違う（一点集合でない限り）。それを入れ子式ではなく，無限連鎖に陥らずにいかに重ね合わせるかが問題なのである。

ここで読者には疑問が生じるであろう。対称性とは違うもの同士の間で同一の関係が成立することだから，共有知識を対称性集合と定義して何の不都合があるのかと。確かにそう思えるが，実はこれは，共有知識成立後のその対称的空間の中でいえることなのである。認識論理を考える場合，われわれはまず，エージェントを「合理的思考ができる主体」と定義する。そこにはすでに，「合理的思考」なるものがあらかじめ共有知識として設定されている。そのうえで各個体が振り分けられているのだ。これは同値と同値関係ということで説明できる。$4=2^2$は同値であるが，違うもの同士の間でも同じ関係が成立すれば（対称性），それは同値関係を持つ同値類とみなされる。たとえば，5と11は，3で割ったとき2余るという関係で（3を法とする合同），同値類である。これが，われわれの持つさまざまな概念，いわゆる集合を生み出す原動力である。ライプニッツの不可識別者同一の原理により，数えられるりんごはどれ一つとして同じものではない。しかし，それをりんごという「法」でもって同値関係を持つ一つの集合にくくるのが，われわれの認識の特性である。だが実情は，反対称性における同値（共有知識）があって，その中で対称性による同値関係が形成され個が生み出されるのである。ゆえに，古典論理にのっとった従来の認識論理は，知識の本来の反対称性を無視し，できあがった対称性の中で共有知識成立の問題を云々していたといえよう。これが本末転倒であることはいうを待たない。そのため，古典論理は共有知識の形式化に行き詰まったのだ。すなわち，自らを成立させ流通させている基盤を，自らの中で構成してみせようとしたわけである。

そこで，古典論理を部分系とする，より包括的な論理の構築が要請される。その基本単位となるのが，命題と一体となった知識状態としてのエージェントである。前稿ではそのイメージモデルとして，ひも状エージェントなるものを提出した。それを今一度，集合論との関係で捉えなおしてみよう。対称性集合と反対称性集合を図で表すと，次のようになる。

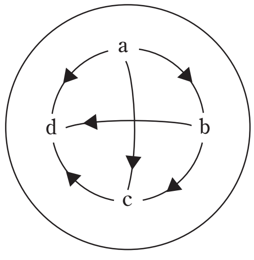

図1 反対称性

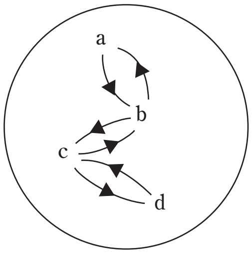

図2　対称性

これを重ね合わせるわけだが，点集合としてみる限りどうしてもうまくいかない。そこでエージェントを一種のひもと見て，点集合の要素であった点をその絡みとするのである。あるいは，現代物理学流に，全体をエージェントという力が働く場と見て，その作用が点要素を現象せしめると考えるのである。そこで，上図を重ね合わせると，次のようになる。すでに集合を示す外枠は取り除き，エージェントは力を表す射そのものとし変数記号で示した。集合でいうところの要素は，それらの交点である。

この集合（というより場）は全体としては反対称だが，絡みの部分で対称性を示している。そこを見ると，反射性$x \leftrightarrow x$，推移性$x \to y \wedge y \to z \Rightarrow x \to z$，対称性$x \to y \Rightarrow y \to x$が成立していることが分かる（円にそって各項をたどっていただきたい。そのとき，右回り，左回りは関係ない）。これが共有知識であり，ひいては古典論理空間なのである。各項は自乗してあるが，これは前稿で述べたように，xはyを知り（x×y），かつ（×）yはxを知る（y×x），すなわちx^2y^2という，認識代数における共有知識を表している。各項が自乗されることによって（これも一種の重ね合わせだ），対称性，交換則が成立するのである。そして，これは前に少し問題にしたが，新たな反射性も加わる。すなわち，x×x（xはxを知る）によって，いわゆる自己意識が生じるのである。そしてこの自己意識が，古典論理の対称性を支えているともいえる。各項は他の項を経由して自己意識にいたる。それは，自己意識は対等な他の自己意識と互いに支えあっている対称関係にあるということだ（ヘーゲルの相互承認論）。要するに，古典論理は共有知識をソトから説明するものではなく，その中で流通している論理なのである。古典論理の説くいわゆる客観的真理（対称性が強いものだ）も，新認識論理の視点では，複数エージェント間の共有知識として定義しなおせる。従来は客観的事実がいかに複数エージェントの共有知識となりうるかが問題となってきたが，客観的事実とは複数エージェント間の共有知識のことであるとすれば，この問題は別角度からクリアーできるわけである。

ここで一言断っておきたいが，図4でエー

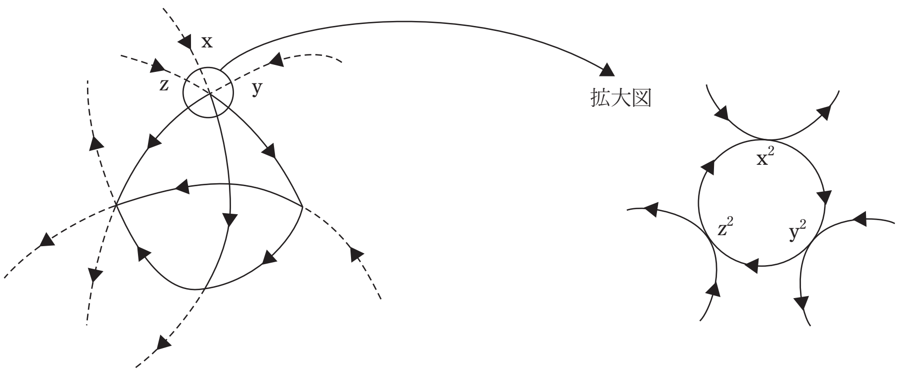

図3　　**図4**

ジェントがループを出て行ったとき，共有知識を保持して出て行くというふうに知識の時系列的な蓄積を読み込んではならない。それだと直観主義モデルになってしまう。エージェントの織り成す知識空間の全体は場であり，共有知識はその中の部分的場である。エージェントはその場に入ることで共有知識を分かち持ち，そのソトに出て行くことでまた個別的知識状態に戻る。両状態の間に時間的推移はないのである。

では，そのソトとは，どれだけ形式化できるものなのか。前稿でそれは，今触れた，他人が知らない各自の個別的知識（たとえば，現在一人こもっている自室内の様子）だとした。それは何も暗黙知や身体知といった潜在的レベルの話ではなく，命題化できるが他エージェントとのネットワークにつながっていない知識というほどの意味である。古典論理を絵とすれば，それは地に当たるものであるわけだが，囲い込み不可能という意味で（囲い込まれれば絵になってしまう），無限の広がりを持つと想定される。しかし，無限という概念を持ち出すと，どうしても集合論に頼らざるを得ない。集合論は，本来囲い込み不可能な無限というものを強引に囲い込む手法だ。われわれの目標は，集合論を用いずにこの囲い込み不可能な領域を，囲い込み不可能という本来の形で定義することだった。そこで提起したいのが，「無境界」という概念である。「無限」に翻案せずに無境界を表現するにはどうすればよいか。それは境界線に立つことである。従来の古典論理のように超越的な視点から俯瞰的に見下ろす限り，境界線はいやおうなく引かれる。それは無限に対しても同じである。だが，境界線上に立てば，ウチとソト（なんという名で呼ばれようが）の違った二つの世界が見えるだけだ。その視点はどちらの側にも属さない。二つの本質的異世界を同時に見るのである。その両義的視点を，境界をはさむ計算ルールの変化ということでぎりぎりまで形式化しようというのが，認識代数の目論見なのである。

上述したように，認識代数では自乗数の間で交換則が成立する。こうしてできた共有知識空間内で，xは反射性により離散性（個体性）を獲得し，そこから乗算の単位元1という概念も生じる。この一度自乗されて最小単位としての個となったxに，再び重ね合わせを施す。$x^2=x$という計算ルールを再導入するのだ。これが集合論でいうベキ等性である。なるほど集合では，$A \cap A=A$（AとAの交わりはAである）。すると今度は，この計算ルールを満たす数として0と1が考えられる。これをもとに，$x \times y=0$，$x+y=1$という相補則を設定したのが，ブール代数だ。0と1は，この集合でのそれぞれ最小元と最大元である。すなわち，この規則は，xとyの重なり部分は0（無）で，xとyをあわせれば1（全体）となるといっているに等しい。xとyは二つで全体を構成する互いに別のもの（補元）ということだ。その中で両者はそれぞれ1にも0にもなりうる。xに0を代入すれば，和の積に対する分配則も算術内で成立する。0は和算の単位元である。ちなみに，xとyの間に特定のつながりがない場合を断絶対というが，これは対称性に含まれる。まったく別個のものというのも対称関係なのだ。二つの互いに離れた要素を認識するには，あるつながりがある場合と違って（そのときはどちらかの視点からこの関係を見て取れるであろう），超越的な第三者による俯瞰的視点が要求される。xとyという互いに素であるものが構成する全体を見渡すブール代数，ひいては古典論理は，やはり神の視点を想定した論理なのである。

ソトはどこまで形式化できるかということ

であった。結局，算術計算を可能にしている離散性が（共有知識による自乗を経た）反射性に根ざしているものとするなら，ソトは計算不可能といわざるを得ない。それは，計算可能性の一般的定義である帰納関数のもとになっている基本関数，f(x)＝x＋1やf(x)＝定数が成立しない（あるいは成立以前である）ことにも通じる。認識代数においても反射性は一応認めておいた。それは，xの個別的知識状態を確認しておく必要があったためである。真の自己意識が芽生えるには，共有知識空間の中で他エージェントを通してそれを獲得するしかない。それがここでいう，改めての反射性であり，通常の論理では始めからx単独で認められている反射性である。他と己を区別する自己意識は，共有知識空間でのみ成立するのである。

ソトは計算不可能であるというのは，何も著者の逃げ口上ではない。それは計算可能性の限界を示すのではなく，計算可能性を生むバックグラウンドとなるものである。別の言い方をすれば，それは主観を表す計算法則である（xyがxの知るyであるように）。計算とは客観的なものの代表であるが，その客観が成立する前の主観的基盤があるのである。それは客観でないという意味で計算不可能なのである。この計算可能な領域と計算不可能な領域を，境界線で仕切るのではなく，境界線上の一つの視点で同時に見るというのが，本章の目標であった。その目安となるのが，交換則の有無である。そしてその契機となるのが，重ね合わせ，共有知識なのである。では次にこれを，具体的な状況に即して検討してみよう。

前二稿で扱ったマッディーチルドレンパズルや一斉攻撃問題に見られるように，共有知識が成立するには，同時に同一の情報が同一の場所でエージェント間に伝えられる必要がある。しかし，この「同じ」ということの定義が難しいことは，すでに論じた。ライプニッツの不可識別者同一の原理にあるように，個体はおのおの同じものではない。その中で生じる同じものとは何か。集合論的定義では，エージェント間で行われる命題の無限キャッチボールで入れ子式に表すしかなかった。それを新認識論理では，エージェント（＝命題）同士の重ね合わせで処理する。たとえばマッディーチルドレンパズルの場合（前二稿参照），額に泥をつけている子供同士は互いの状態を知っていて，自分の状態は知らない。この二人を認識代数で，xとyとおこう。イタリックにしたのは，普通の代数のxとyと区別するためだ。xyは，xは「一人の子供が泥をつけている」と知っている，という意味である。ここで注意すべきは，xとyは互いに独立した二つの存在ではなく，xyならxの，yxならyの個別的知識状態を表していることである。この二つはもちろん現段階では交換可能ではない。ここに，先生の「この中の少なくとも一人は額に泥をつけています」という宣言で，xyとyxがリンクされる。なぜなら，先生の宣言は，互いの知識状態の，互いの面前での確認につながるものであるからだ。ここで，あの反対称性の定義が思い起こされる。すなわち，$x \to y \wedge y \to x \Rightarrow x = y$（xからyが言え，かつyからxが言えるなら，xとyは同値である）。従来の共有知識の成立条件である同時性，同一性は，ここに現れているように思われる。xはyを知り（$x \times y$），かつ（×）yはxを知る（$y \times x$），すなわち，$x^2 \times y^2$。このとき，xとyは交換可能なxとyになるのである。これは同一の知識（x＝y）であり，個別のもの同士の対称関係($x \to y \Rightarrow y \to x$)である。$x$は重なることによってxとなり，可換な通常の代数計算が可能となる。それがいわば，ソトからウチへの分岐点な

のである（ただ，一言補足しておけば，共有知識空間＝古典論理空間が計算可能な空間であるかのごとく言ってきたが，正しくは，さらにその中の直観主義論理空間が計算可能空間であると言ったほうがよい。古典論理の中にも計算不可能な部分はある。たとえば，第一階述語論理の決定不能性だ。それは，共有知識空間がやはりソトとの境界線を含んでいる面があるため，それがウチに反映した結果といえよう。その微妙な境界部分をそぎ落とし，真偽ではなく証明可能性を命題の判定基準に置いた直観主義論理にあって始めて，すべては計算可能となったのである）。

共有知識の成立条件として従来いわれてきた同時性が重ね合わせによって表現可能なことは，何の下地もなく初めて聞く情報についてもいえる。顔つき合わせて（文字通りそうだというわけではなく，同時に同じ場所でという条件を最も直截に満たしているのは対面状態であろうという意味で）同じ情報を聞く場合，これにより，相手がその知識状態となり（マッディーチルドレンパズルの場合は，あらかじめあった，額に泥をつけている状態），私がそれを確認する（先生の宣言でそれと再認識する）ことが，重ね書きされているのである。共有知識成立の契機としてよく挙げられるパブリックアナウンスメントは，この重ね書き，ループを生み出すものだ。それは対面様状態の中で成立する一方で，知識の対面状態を作る。上記の反対称性の式の，∧（かつ）の部分をである。自分はこのことを知っているのであり，かつ，相手を通してこのことを知っているのである。そのとき，私と相手は同じ知識状態にある。

今一度，計算法則の推移を整理しよう。認識代数では次の基本法則が成り立つ。

結合則　$x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$

分配則　$x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$

交換則は成立しない。　$x\times y\neq y\times x$

和算のみはない。和算は分配則の形で表される。もちろん，違う係数同士（たとえばxzとyw）の和は成立しない。

乗算の単位元　$x^2=\mathrm{x}$　$x\times 1=\mathrm{x}$

重ね合わせによって最小単位としての個体1が成立し，それを再度掛けることによって，xはわれわれの見慣れたxとなる。乗算の単位元1が成立したことにより，和算は1を係数として乗算とは独立して表現できるようになる。そして和算の単位元0が導入される。認識代数の段階では，認識＝存在であるから，0や空集合などありえない。さらに，重ね合わせによって形成されたxとyは，$\mathrm{x}\times\mathrm{y}=x\times y\times y\times x$ということで，交換則が成り立つようになる。そしてこの右辺が，認識代数において共有知識を表す式であった。先に掲げた共有知識を表すイメージ図は円環をなしていたが，これはくしくも代数学における環に通じる。環とは，和算と乗算が定義され，和算について可換群をなし，乗算について結合則，分配則が成り立つ集合をいう。さらに交換則が成り立つものを可換環という。こうしてみると，共有知識は一種の可換環として捉えることもできるかもしれない。すると，その内部は閉じたものとして完全に従来の代数学で表現可能ということになる。だが，それらを生み出すバックグラウンド，あるいはそれとの境界線は，通常の代数では表現しきれないものなのである。

次に，再度xを自乗してベキ等性の法則，$\mathrm{x}^2=\mathrm{x}$を導入したのが，ブール代数である。重ね合わせによってできた共有知識内での，重ね合わせの表現法である。この式は，今度は算術的に1と0で満たされる。それに真と偽の解釈を施したのが，古典的二値論理である。かくして，

共有知識内に古典論理空間が形成されるわけである。そこでは，xとyに独立した（個体として確定したので，aやbの定数項を当てたほうがなじみやすいであろう）複数エージェントが，同一の客観的真理なるものを共有しているのである。

この計算法則の推移を共有知識成立の現場に当てはめれば，次のようになる。対面状態のxとy，すなわち，xyとyxは，まだ自由変数である。交換可能であるとはいえない。そこに命題Pがアナウンスされ，それらの値が決定される。そのとき，共有知識をあらわす次の論理式が成立する。$xy(P) \wedge yx(P) \Rightarrow x(P) = y(P)$　これは反対称性を表す式でもあった。だが同時に，イコール（同値）は対称性にも通じた。これは対称性成立の契機でもあるのだ。すると，xとyはPで結ばれた違ったものであってもよい（同値関係）。なぜなら，$x \neq y$も対称的関係であるからだ。かくして，xとyは定項aとbとなり，$ab \rightarrow ba$の交換則が成立するようになる。かように共有知識は，古典論理的対称性が通用する場所でもあり，それを生み出す契機ともなっているのである。

新認識論理の体系

前章で示した代数系での推移を，論理体系において示せばどうなるであろうか。すなわち，新認識論理の中で古典論理を再構成するという，本稿の掲げた課題である。はっきりいって，それは一朝にできることではない。ここでは基本アイデアを述べるにとどめざるを得ないことをお断りしておく。

前稿で，従来の認識論理では表されなかったタイプの知識，「何か知らないが知らないことがあることを知っている」を「推進知識」と名づけ，$Ki(\exists xKiy)$という形を与えた。これは「エージェントiはyなるxが存在することを知っている」という意味で，述語を自由変数にしたため，値域も指示対象も定まらぬ，古典論理的には「無意味な」式となっている。しかし，このyがある値となることによってxがエージェントiの知識状態として「存在」し，古典論理の「地」となる新認識論理の原子式Kipが生まれるのである。前稿では従来の論理学におけると同様，大文字のPを命題記号として当てたが，今回イタリックにしたのは，これがエージェントiの個別的知識，すなわち，まだ他エージェントとのつながりを持っていない知識であることを示すためである。これを，共有知識という複数エージェントのネットワークの中で，古典論理の命題Pに推移させようというわけである。すなわち，前述したように，古典論理の命題（客観的真理）を複数エージェントの共有知識として定義しなおそうというのである。ちなみにこれは，近代論理学の鼻祖，フレーゲも問題にしていた命題内容と判断の区別にも通じる。命題Aは，「Aということ」という内容と，「Aである」という判断との二通りに解釈することができる。そして，事実として当然重要になってくるのは後者の判断である。それには，命題の妥当性を認める，命題に随伴的な同意が必要になってくる。それを保証するのが，複数エージェント間の共有知識なのである。

話を簡単にするために，二エージェントの場合で考えよう。次の二人のエージェントを「対面状態」にあると定義する。$\{K_1xy, K_2yx\}$ これは推進知識から，互いのx，yが決まれば互いの知識状態が決まる状態を表している。すなわち，この二変数は互いを値域としているといえる。対面状態が具体的にどういうものかというのは，おいておく。ただ，それは，ヘーゲ

ルのいう相互承認のようなものだ。自我は他者からの承認を求めるが，ただ受動的に承認されるのを待っているわけではない。他者がこちらを承認するとき，承認権ともいうべき自我（こちらを承認するに値する自我）を，こちらも他者に承認しているのである。そうした意味で，彼方と此方の自我は同時に立ち上がる。この対面状態を，従来の点的エージェントと新たな射的エージェントで図示すれば，次のようになろうか。

図5では，五人のエージェントが互いに他と連絡し（対面し），その間を共有知識が往き来するというイメージであるが，これではどうしても共有知識の特徴である同時性が表現されない。それに対し図6では，五人のエージェントが交点で同時同一状態で向き合っているのである。

変数の値が決まっていない二エージェントは，まだ交換可能とはいえない。ここで変数の値が決まると，次に掲げる，反対称性の式の認

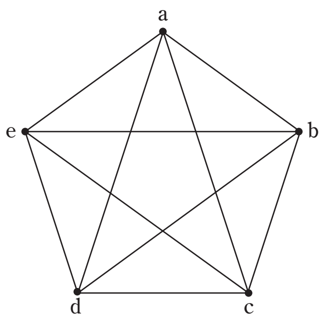

図5　点的エージェント

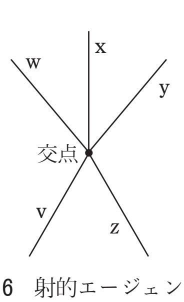

図6　射的エージェント

識論理ヴァージョンが成立する。$K_1K_{2P} \wedge K_2K_{1P} \rightarrow C_{12}P$　すなわち，対面状態にある両エージェントが同じ知識状態ならば，両者はイコールであり，共有知識Pとなる。大文字Pとなったのは，計算法則の推移で見たように，これにより対称性が生じエージェント間の交換則（$K_1K_2P \rightarrow K_2K_1P$）が成立し，古典論理空間が形成されるからである。古典論理はこうした来歴を無視して，あるいは，エージェントの視点を普遍的神の視点に置き換えて，いきなり客観的真理なるPから始まる論理といえよう。

かような古典論理を拡張した様相論理の一つである従来の認識論理も，新認識論理から再構成できる。路線はやはり重ね合わせである。すなわち，本来複数であるべき原エージェント（従来の認識論理のエージェントと区別して仮にこう呼んでおく）が重ね合わせによって，従来の認識論理の基本単位である単一エージェントを構成しているのである。S4については前稿でも述べた。推進知識から生まれた原子式KiPの命題記号P（元来変数xであったところ）にこの原子式自体を繰り返し代入することで次の式が得られる。KiKiKi...KiP　これに包含関係を想定して半順序構造を得る。KiP ≤ KiKiP ≤ KiKiKiP... これが原エージェントの織り成す知識空間を構成する増殖原理であった。この包含関係を同値とみなして，一エージェントに重ね合わせたのがS4，KiP→KiKiPである。

次にS5，¬KiP→Ki¬KiPであるが，これは認識論上非常に重要な問題を含んでいる。それは，¬KiPの解釈である。「エージェントiはPを知らない」とは，率直に受け止めると，一エージェントに収まりきらない視点を要求する。たとえば，この命題はこう解釈できよう。P∧¬KiP（Pであり，かつ，iはPを知らない）。では，Pを認識しているのは誰か。そ

れが神なのか。また，こうも解釈できよう。「iの認識状態にはPはない」 それでは誰か他のエージェント内にあるのか（誰にもなければ，そもそもPはどこから出てきたのか）。また，後者の解釈だと，Ki￢P（iはPでないことを知っている）とどう違うのか，といった曖昧性がつきまとう。S5（古典論理）にはなにか通常の人知の枠を超えたところがあるように思われるため，しばしば「強すぎる」といわれるのである。かように，「知らない」ということを一エージェント内で形式化するには，何か条件を加える必要がある。そこでS4(直観主義論理)的にはこう解釈される。「知らない」とは，「証明手段がない」ということである。すなわち，「知っている」を「証明手段がある」という意味に制限するのである。すると，￢KiPは，「iはPを証明する手段を持たない」と解釈される。これを具体例で示すと，たとえばフェルマーの最終定理で，Pを$x^n+y^n=z^n$の次数が3以上のときにこの式を満たす数とすると，まだ定理が証明されていない段階では，￢KiP「そういった数の存在は証明されていない」だが，定理が証明されると，Ki￢P「そういった数は存在しないことが証明されている」となって，両者の区別がはっきりする。こうした制限を設けない限り，S5は本来，マルチエージェント的な視点が要求される知識状態を云々していることになる。すなわち，$\neg K_1P \rightarrow K_2 \neg K_1P$「エージェント1がPを知らなければ，（誰か）エージェント2がエージェント1がPを知らないことを知っている」とすれば，Pの出所に悩む必要はない。エージェント2がそれを知っているのである。やはりS5も，重ね合わせによってこれを一エージェント内に収めた結果の論理なのである。

では，新認識論理では￢KiPはどう解釈されるのか。まず，P∧￢KiP（Pであり，エージェントiはPを知らない）は，いま述べたように複数エージェントの視点（Pを知っているエージェントの視点）を導入すればよい。「私」のような一エージェントの視点に限定される場合はどうか。たとえば，「私は彼の名前を知らない」はどう表現されるか。また，全人類がいまだ答えを知らない（誰も知らない）数学の未解決問題の場合は。これらはすべて，推進知識，Ki（∃xKiy）でもって表現可能である。これは究極的には，「何か知らないが知らないものが在ることを知っている」という知識の形態を表すものであった。しかし，yという自由変数の取りうる値域を絞り込むことによって，「日本人の名前の中で彼の名前となるもの」があることを知っている，であるとか，「この問題を解決する証明式となるもの」があることを知っている（当の問題がいわゆる決定不能命題である可能性はあるが,「知っている」は今の場合，全人類の誰も答えを知らないのだから，「信じている」と等価と考えてよい）というように，段階をつけて解釈可能である。そして，その値域が具体的限定的になっていくにつれ，従来の集合論の命題の形を帯びてくるのである（その意味で，集合論も新認識論理の部分系である）。かように，推進知識の公理を使うことによって，「知らない」という認識論的に扱いにくい否定状態が，「知っている」という表現しやすい肯定状態に変換できるのである。「知らない」は確かにS5のいうように「知らないことを知っている」状態であるが，ただ，その内容を具体的命題とせず，何かまだ定まらぬ自由変数にまで還元することが，古典論理の「地」を築くうえで必要である。ちなみに，推進知識の公理が古典論理の体系よりも原初的であることの表れとして，存在記号ヨを含んでいること

を指摘しておこう。周知のとおり，述語論理では全称記号∀が∃より優勢で，後者は¬（∀x¬p）という形で表現できる。記号∃を導入したのは，ひとえに利便性のためだ。かように，はじめにすべてを見通す視点を設定するところは，やはり神の論理といわれる古典論理ならではであろう。これに対し，新認識論理では認識＝存在が「すべて」に先立つ。認識によりモノが存在し，それが共有されることにより古典論理の客観的事実となる（その意味では，認識代数の変数記号を従来の代数のそれと区別するためにイタリックにしたように，推進知識の存在記号も述語論理のそれと分けるためイタリックにすべきかもしれない)。「すべて」とはその共有知識空間のことなのである。その中で構築された従来の認識論理は，古典論理が命題論理から述語論理へ拡張されたように量化を導入できるかという問題に付きまとわれていたが（ベースとなっている様相論理はすでに量化されているが)，新認識論理の観点に立てば，そもそも量化を支えているのは認識のほうなのだから，その問題は最初から解決済みということになる。

かように，従来の認識論理は，単一エージェント内で成立したものをマルチエージェントに拡張して共有知識を説明しようとしてきた。だが，今まで見てきたように，実態は逆なのだ。複数の原エージェントが共有知識により単一エージェントとなり，その複数性を統一的視点（対称性）のもとにまとめ古典論理を立ち上げるのである（その古典論理の中でまた，それを共有する合理的エージェントとして個別化される)。ゆえに，共有知識は計算で再構成されるものではなく，むしろ計算を可能にする，あらかじめある計算不可能な基盤だといえる。その意味で，共有知識は推進知識と並んで，新認識論理構築に当たって，その公理として位置づけられるべきものとなろう。

最後に，当然起こってくるであろう疑問にお答えして，この稿を閉じようと思う。それは，こうした認識論理を打ち立てることに何のメリットがあるのか，という問いかけである。論理とは推論する力であるともいわれる。真なる前提から一定の推論規則を経て真なる結論に至る，それが論理というわけである。推論は広い意味で計算に含まれるであろう。その計算が不可能な領域を定めた論理（？）に何の効用があるのか。だが，ここで念押ししたいのは，その推論を推し進めるうえで強力な支点となっている対称性が作られたものであるということだ。推論過程でわれわれは，x→y⇒y→xを陰に陽に大いに活用しているが，それは世界に自然にある法則というより（宇宙物理学などで話題になる対称性はまた別問題として)，推論ステップを築いていく有用な道具なのである。そして，それを有用な道具たらしめているのが，複数エージェントの共有知識空間なのである。そうしたことを含め，古典論理のいわば後付け的性格を確認しておくことは，古典論理が決して世界を説明し尽くす論理でないことを知るよすがとなろう。それは，古典論理では表せない何モノかを可能な限り具体的に表現しようとする試みに通じるのである。

とはいえ，論理と唱っている限り，何も計算できませんと開き直るわけにもいかない。見たように，認識代数にはもちろん独自の計算法則がある。そこから，従来の計算法則の新たな面も見えてくる。それはいわば，三次方程式の解の公式を見出す過程で出てきた負の数の平方根のようなものだ。実数という体系内の問題を解決するにせよ，いったん虚数という外に出る迂

回路を通る必要があったのだ。当初はこの虚数というものに戸惑いを感じた数学者たちも，これと真摯に向き合い体系化することで，複素数という沃野を切り開くことができた。ある分野の問題を解くときに行き詰まった場合，フィクションにせよ一旦その分野の外を設定することは,広く問題解決法として有効な手段であろう。そして，その設定した虚世界が実世界として定着し，新たな可能性を提供してくれることもある。共有知識の問題はまさにこれにあたり，その解決にはいったん古典論理のソトに出る必要がある。次稿では，そのソトたる新認識論理の公理系，計算法則の細部をより形式的につめるとともに（理想的には，それは共有知識成立以前のいかなる知識状態をも表せるはずだ），それらの実践的な応用方法を探っていきたいと思う。

註

⑴ 鈴木啓司「新たなる認識論理の構築に向けての試論 ― 共有知識（common knowledge）を手がかりに―」名古屋学院大学論集（人文・自然科学篇）Vol. 42 No. 2 2006．ならびに，「新たなる認識論理の構築―デザイン篇―」名古屋学院大学論集（人文・自然科学篇）Vol. 43 No. 2 2007.

⑵ プラトン『メノン』藤沢令夫訳　岩波文庫 1995，pp45–46.

⑶ Robert J. Aumann. Agreeing to Disagree, in *Collected Papers* I, MIT Press (2000).

参考文献

アラン・ブーヴィエ『集合論』川尻信夫訳　文庫クセジュ　白水社　1971.

小島寛之「『知っていることを知っている』のトポロジー　共有知識，相互推論，完全性定理」，現代思想2月臨時増刊「総特集ゲーデル」2007.