名古屋学院大学論集　社会科学篇　第 49 巻　第 2 号　pp. 1‒11

支配型AHPと一斉法

――故尾崎都司正先生を偲んで――

木　下　栄　蔵

1　支配型AHP

本章では，木下・中西が提案した支配型AHP（支配代替案法と支配評価水準法）について説明する。

1.1.　支配代替案法（AHPにおける新しい考え方）

(1) 支配代替案法の提案［1］

従来型AHPでは各評価基準の重要度は総合目的からトップダウンで一意的に決定した。しかし，意思決定のパターンの中には，総合目的から各評価基準の重みを決定するのではなく，特定の代替案を念頭においてそれを評価しやすいように評価基準の重みを決めていくアプローチも存在すると考えられる。そのような評価基準の重みを規制する機能を持つ代替案をここでは「規制代替案」と呼ぶことにする。

ところで，評価基準の重みの分布は，規制代替案の数だけ存在することになるが，それは評価基準の重み決定に関して規制代替案間の争いを予想させるものである。しかし，われわれは常にそのようなものとして評価基準の重みを煮詰めるプロセスをとっているわけではない。意思決定は，リスクが少なければ多少の誤差を許容してでもできるだけ少ないコストで済ませようとするはずである。

ここでは，そのような要望に応える有力な方法として，次のようなアプローチを考察することにする。

つまり，評価の根拠として決めた規制代替案による評価基準の重みの考え方に支障がなければ，そのまま最後までその方針で評価してしまうアプローチである。

そこで，本稿では次のような評価方法を考える。すなわち，各評価基準の重みは，それぞれの規制代替案によって異なる分布をする。しかし，その分布は，意思決定者の恣意によって選ばれた規制代替案によって一意に決定されるものとする。つまり，評価の根拠として決めた規制代替案以外の規制代替案に関する各評価基準の重みは，根拠となる規制代替案に関する各評価基準の評価に〈完全に服従〉するものとする。

ここでは，このような支配力を持つ規制代替案を「支配代替案」，また支配代替案に服従する規制代替案を「服従代替案」と呼ぶことにしよう。つまり，服従代替案の評価基準の重みは，支配代替案の各評価基準の重みから自動的に導出される。そして，このモデルでは支配代替案は，各評価基準の重み分布のみならず，それぞれの重み分布から導かれる総合評価値までを支配する。

つまり，どの代替案が「支配代替案」になろうとも，同一の代替案の総合評価値は同じになる。

以下，ここで提案する新しいアプローチのことを「支配代替案法」と呼ぶことにする。

(2) 支配代替案法による計算例

ここでは，支配代替案法による計算を簡単な例により説明する。

①ステップ1

階層構造は，2つの評価基準（Ⅰ，Ⅱ）と3つの代替案(1, 2, 3)からなるとする(図1参照)。

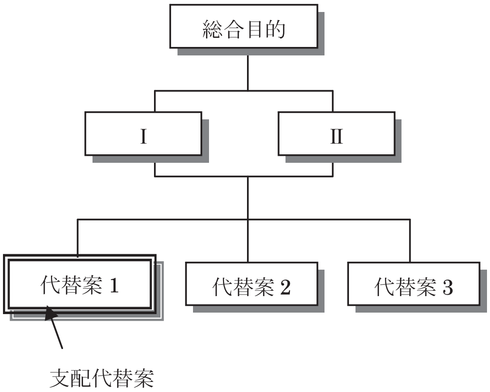


図1　階層構造

②ステップ2

評価基準（Ⅰ，Ⅱ）間の一対比較を，支配代替案（代替案1）について行う。その結果，代替案1から見たⅠの重み（これからは，この重みをⅠ(1)と書く）は0.4，代替案1から見たⅡの重み（これからは，この重みをⅡ(1)と書く）は0.6になったとする(一対比較値は表1参照)。

表1　支配代替案1に関する評価基準Ⅰ，Ⅱの一対比較

	Ⅰ	Ⅱ	重み
Ⅰ	1	2/3	0.4
Ⅱ	3/2	1	0.6

すなわち，支配代替案1が規制する評価基準Ⅰ，Ⅱの重みは0.4対0.6という意味である。

③ステップ3

評価基準（Ⅰ, Ⅱ）に対する各代替案（1, 2, 3)の評価を一対比較する。ただし, 評価結果は, 支配代替案（この場合は1）を1に規準化する。すなわち，評価基準Ⅰからみた2の評価は1の2倍であり，3の評価は1の3倍である（表2参照)。

一方，評価基準Ⅱから見た2の評価は1の0.5倍であり，3の評価は1の0.17倍である（表2参照)。この結果，各代替案（1，2，3）の総合評価値が求まる（表2参照)。ただし，支配代替案1の総合評価値は1である。

表2　評価表（1)

支配代替案	1	Ⅰ (0.4)	Ⅱ (0.6)	E 総合評価値
評価	1	1	1	1
	2	2	0.5	1.1
	3	3	0.17	1.3

すなわち，

1の総合評価値1(E)は

$$1(\mathrm{E}) = 1 \times 0.4 + 1 \times 0.6 = 1$$

2の総合評価値2(E)は

$$2(\mathrm{E}) = 1 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 = 1.1$$

3の総合評価値3(E)は

$$3(\mathrm{E}) = 3 \times 0.4 + 1.17 \times 0.6 = 1.3$$

となる。

④ステップ4

次に，支配代替案に関する情報をもとに，服従代替案2が規制する評価基準Ⅰ，Ⅱの重みを求める。このとき，ステップ2より，支配代替案1に関する評価基準Ⅰ，Ⅱの重みは既知である。

$$\mathrm{II}(1)/\mathrm{I}(1) = 0.6/0.4 \qquad (1)$$

ここで，支配代替案1と服従代替案2がそれぞれ規制する評価基準（Ⅰ, Ⅱ）の重みの比は, 評価基準（Ⅰ，Ⅱ）からみた支配代替案1と服従代替案2の評価値の比と同じであるとする。すなわち，以下の式(2)，(3)は既知である。

$$2(\mathrm{I})/1(\mathrm{I}) = 2/1 = \alpha \tag{2}$$
$$2(\mathrm{II})/1(\mathrm{II}) = 0.5/1 = \beta \tag{3}$$

ただし，1(Ⅰ)，2(Ⅰ)は評価基準Ⅰからみた代替案1，2の評価値で，1(Ⅱ)，2(Ⅱ)は評価基準Ⅱから見た代替案1，2の評価値である。

すると，式(2)，(3)より服従代替案2に関する評価基準（Ⅰ，Ⅱ）の重みの比は，以下の式(4)のように導かれる。

$$\frac{\mathrm{II}(2)}{\mathrm{I}(2)} = \frac{\beta \times \mathrm{II}(1)}{\alpha \times \mathrm{I}(1)} = \frac{0.5 \times 0.6}{2 \times 0.4} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{0.273}{0.727} \tag{4}$$

このようにして，服従代替案2に関する評価基準（Ⅰ，Ⅱ）の重みが決定する。

この結果から，Ⅰ(2)は0.727，Ⅱ(2)は0.273となる。また，表2のデータより，代替案（1，2，3）の総合評価値を服従代替案2の規制に基づく評価基準の重みにより求めると，表3のようになる。

表3　評価表（2）

服従代替案	2	Ⅰ 0.727	Ⅱ 0.273	E 総合評価値
評価	1	0.5	2	0.909
	2	1	1	1
	3	1.5	0.34	1.183

すなわち，

1の総合評価値1(E)は

$$1(\mathrm{E}) = 0.5 \times 0.727 + 2 \times 0.273 = 0.909$$

2の総合評価値2(E)は

$$2(\mathrm{E}) = 1 \times 0.727 + 1 \times 0.273 = 1.0$$

3の総合評価値3(E)は

$$3(\mathrm{E}) = 1.5 \times 0.727 + 0.34 \times 0.273 = 1.183$$

となる。

⑤ステップ5

次に服従代替案3の規制に基づく評価基準Ⅰ，Ⅱの重みⅠ(3)，Ⅱ(3)をステップ4と同様の方法で求める。この結果，Ⅰ(3)は，0.922，Ⅱ(3)は0.078となる。そして，この結果よりステップ4と同様の方法で服従代替案3に関する各代替案の総合評価値を求める（表4参照)。

表4　評価表（3）

服従代替案	3	Ⅰ 0.922	Ⅱ 0.078	E 総合評価値
評価	1	0.333	5.88	0.766
	2	0.667	2.94	0.894
	3	1	1	1

すなわち，

1の総合評価値1(E)は

$$1(\mathrm{E}) = 0.333 \times 0.922 + 5.88 \times 0.078$$
$$= 0.766$$

2の総合評価値2(E)は

$$2(\mathrm{E}) = 0.667 \times 0.922 + 2.94 \times 0.078$$
$$= 0.844$$

3の総合評価値3(E)は

$$3(\mathrm{E}) = 1 \times 0.922 + 1 \times 0.078 = 1$$

となる。

ここで，表2，表3，表4の総合評価値を正規化すると，いずれも1(0.294)，2(0.324)，3(0.382）となり，どの服従代替案の規制による評価基準の重みを適用しても，総合評価値は支配代替案による総合評価値と同じであることがわかる。

このような状態を「支配代替案間の互換性」と呼ぶことにしよう。支配代替案間の互換性が成立するときは理想的な評価品質の状態にあるといえる。

しかし，現実に互換性が保たれることは希で，多少の評価のずれ（ギャップ）が生じることが多い。そこで，このような評価のずれを調整する方法を，木下・中西は「一斉法」として提案した（3章参照）。この方法についてはSaatyが提案したスーパーマトリックスとよく似た役割を果たすものと思われる。

1.2.　支配評価水準法［2］

(1) 相対評価法と絶対評価法

AHPには，相対評価法と絶対評価法の2つの手法がある。

相対評価法は，評価基準のそれぞれに対する代替案間の一対比較結果をもとに総合評価を行う。絶対評価法は，評価基準のそれぞれに対する各代替案の絶対評価値を元に総合評価を行う。前者は代替案間の直接的な比較が有効な場合に適用され，後者は評価尺度を媒介しての代替案間の間接的な比較が有効な場合に適用される。

ところで，木下・中西は，相対評価法における支配型AHP（支配代替案法）を提案した（前述)。そこで，ここでは，絶対評価法においても同じモデルが適用可能であることを明らかにするものである。

ところで，AHPの進化を，手法の拡張（絶対評価法としての拡張）と視点（考え方）の進化（支配型AHPとしての進化）から捉えると表5に示すようになる。

(2) 支配評価水準法による計算

ここでは，支配評価水準法（絶対評価法における支配型AHP）による計算を「経営戦略」の例により説明する。

ところで，支配代替案法（相対評価法における支配型AHP）の考え方は前述した。ただし，絶対評価法では，代替案評価に関する評価水準間にも相対評価法における支配代替案と同様の支配関係が存在することを明らかにする。

表5　AHPの拡張と進化

視点の進化

視点／手法	従来の視点	支配的視点
相対評価法	従来型相対評価法	支配代替案法
絶対評価法	従来型絶対評価法	支配評価水準法

手法の拡張

①$\boxed{\text{ステップ1}}$

階層構造は，2つの評価基準（A，B），5つの代替案（代替案Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ）からなるとする（図2参照)。

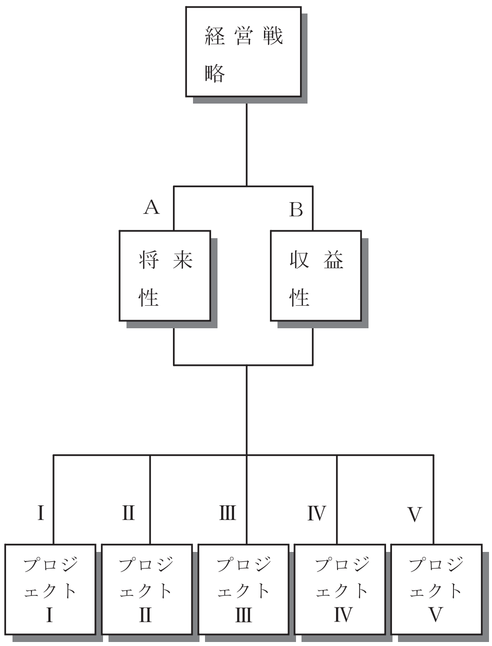


図2　階層構造

②$\boxed{\text{ステップ2}}$

評価基準Aの評価水準はG(良い)，M(普通)，P（悪い）とする。そこで，これら3つの評価水準間の一対比較を行う。その結果は，表6に

示したとおりである。一方，評価基準Bの評価水準もG（良い），M（普通），P（悪い）とし，評価水準間の一対比較も表6に示した。

表6　評価基準間の一対比較

評価基準Aに関する評価水準間の一対比較

評価基準A	G	M	P	重み	規準化
G	1	4	7	0.687	1.0
M	1/4	1	5	0.244	0.355
P	1/7	1/5	1	0.069	0.100

C.I.＝0.062

評価基準Bに関する評価水準間の一対比較

評価基準B	G	M	P	重み	規準化
G	1	3	5	0.637	1.0
M	1/3	1	3	0.258	0.405
P	1/5	1/3	1	0.105	0.165

C.I.＝0.019

③ステップ3

評価基準（A，B）間の重みの一対比較を評価者の恣意により選ばれた支配代替案について行う。この場合の支配代替案は評価基準Aに関する評価が評価水準G（良い）で，評価基準Bに関する評価も評価水準G（良い）であるような代替案を考える。このような仮想的な代替案は実際に存在してもしなくても構わない。

さて，このような支配代替案が規制する評価基準A, Bの一対比較は表7に示すようになり，重みは0.6対0.4になった。

表7　支配評価水準に関する一対比較

	A	B	重み
A	1	3/2	0.6
B	2/3	1	0.4

④ステップ4

評価基準(A，B)に対する各代替案(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ）の評価を絶対評価法で行う。この場合，支配代替案は評価基準A，Bとも評価水準G（良い）である。従って，表6の重みを，評価基準A，Bとも評価水準Gを1.0に規準化する。

ここの代替案の評価は，このような仮想的な支配代替案を念頭に置いてそれとの比較で実施しているものと考えられる。

その結果, 支配評価水準(A, BともGである）に関する各代替案の総合評価値は，評価基準の重みにより計算され，表8のようになる。

表8　評価水準間（G，G）から見た総合評価

支配評価水準	(G, G)	A（0.6）	B（0.4）	E 総合評価値
評価	Ⅰ	G 1.0	P 0.165	0.666
	Ⅱ	M 0.355	P 0.165	0.279
	Ⅲ	P 0.1	P 0.165	0.126
	Ⅳ	P 0.1	G 1.0	0.46
	Ⅴ	M 0.355	G 1.0	0.613

⑤ステップ5

つぎに，支配評価水準の結果を元に，それ以外の評価水準（服従評価水準）に関する評価基準の重みと総合評価値を求める。ここで，評価基準A，Bとも評価水準がP（悪い）になる仮想代替案が比較基準として念頭に置かれている。求め方は前述した支配代替法の場合と同じである。

ただし，ここでは，支配評価水準と服従評価水準がそれぞれ規制する評価基準（A，B）の重みの比は，評価基準（A，B）からみた支配評価水準と服従評価水準の評価値の比と同じである。

すなわち，$\boxed{ステップ3}$より，

G(A)/G(B)＝0.6/0.4 (1)

は既知である。

また，$\boxed{ステップ4}$より，以下の式(2)(4)は既知であり，式(3)(5)が導出される。

P(A)/G(A)＝0.1/1.0 (2)

∴P(A)＝0.1×G(A) (3)

P(B)/G(B)＝0.165/1.0 (4)

∴G(B)＝0.165×G(B) (5)

したがって，式(1)，(3)，(5)より，式(6)が導出される。

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.1\times 0.6}{0.165\times 0.4}=0.909=\frac{0.476}{0.524} \quad (6)$$

このようにして，服従評価水準に関する評価基準（A, B）の重み（0.476対0.524）が決定する。また，服従評価水準（評価基準A，Bとも評価水準はPである）を仮想代替案とするため，表6の重みを評価水準Pを1.0に規準化する（表9参照）。

表9　評価水準（P，P）を基準にした評価水準の重み

評価水準A

	重み	規準化
G	0.687	9.957
M	0.244	3.536
P	0.069	1.0

評価水準B

	重み	規準化
G	0.637	6.607
M	0.258	2.457
P	0.105	1.0

この結果，表8のデータより，代替案（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ）の総合評価値を服従評価水準（P，P）の規制に基づく評価基準の重みにより求めると，表10のようになる。ところで，この場合，服従評価水準（P，P）と同じ評価を有する代替案Ⅲは総合評価値が1.0となる。

表10　評価水準（P，P）から見た総合評価

服従代替案	(P, P)	A (0.476)	B (0.524)	E 総合評価値
評価	Ⅰ	G 9.957	P 1.0	5.264
	Ⅱ	M 3.536	P 1.0	2.207
	Ⅲ	P 1.0	P 1.0	1.0
	Ⅳ	P 1.0	G 6.067	3.655
	Ⅴ	M 3.536	G 6.067	4.862

⑥$\boxed{ステップ6}$

次に，服従評価水準（M，M）の規制に基づく評価基準A，Bの重みを$\boxed{ステップ5}$と同様の方法で求める。

評価基準A，Bの重みは（0.568対0.432）となる。そして，この結果より，ステップ5と同様の方法で，服従評価水準（M，M）の規制に基づく評価基準の重みにより，各代替案の総合評価値を計算すると表12のようになる。

ただし，服従評価水準（M，M）を仮想代替案とするため，表6の重みを評価水準Mを1.0に規準化する（表11参照）。

表11　評価水準（M，M）を基準にした評価水準の重み

評価水準A

	重み	規準化
G	0.687	2.816
M	0.244	1.0
P	0.069	0.283

評価水準B

	重み	規準化
G	0.637	2.469
M	0.258	1.0
P	0.105	0.407

表12　評価水準（M，M）から見た総合評価

服従評価基準	(M, M)	A (0.568)	B (0.432)	E 総合評価値
評価	Ⅰ	G 2.816	P 0.407	1.775
	Ⅱ	M 1.0	P 0.407	0.744
	Ⅲ	P 0.283	P 0.407	0.337
	Ⅳ	P 0.283	G 2.469	1.227
	Ⅴ	M 1.0	G 2.469	1.635

ここで，表8，表10，表12の総合評価値を正規化すると，いずれも代替案Ⅰ(0.310)，Ⅱ(0.130)，Ⅲ(0.059)，Ⅳ(0.215)，Ⅴ(0.286)となり，どの服従評価水準の規制による評価基準の重みを適用しても総合評価値は，支配評価水準による総合評価値と同じであることがわかる。

ところで，本章で説明した絶対評価法における支配型AHPを，支配評価水準法と呼ぶことにする。

2　支配型AHPの数学的構造

本章では，支配型AHPの数学的構造を評価基準が2つ（Ⅰ，Ⅱ），代替案が3つ（1, 2, 3）で，支配代替案1の場合で説明する。まず，支配代替案1からみた評価基準の重みベクトルb^1を

$b^1=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$として，評価マトリックスAを

$$\mathrm{A}=\begin{array}{c} \\ \text{代替案1} \\ \text{代替案2} \\ \text{代替案3} \end{array}\begin{array}{c} \text{評価基準Ⅰ}\quad\text{評価基準Ⅱ} \\ \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{array}$$

とする（図3参照）。

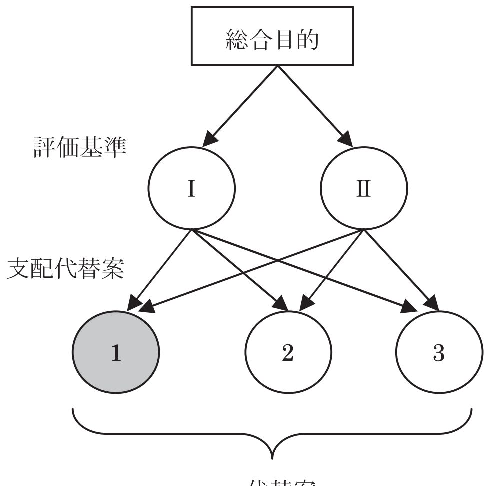


図3　評価基準と支配代替案

このとき，総合評価値ベクトルEの導出は次のようになる。

$$E=\begin{bmatrix} \text{代替案1の総合評価値} \\ \text{代替案2の総合評価値} \\ \text{代替案3の総合評価値} \end{bmatrix}\equiv Ab^1$$

すなわち，ベクトルEは評価マトリックスAと重みベクトルb^1にのみ依存する。

また，ベクトルEは次のように表現できる。

$$E\equiv Ab^1=AA_1^{-1}A_1A_1^{-1}b^1$$

ただし，A_1とは，支配代替案1の評価値（$a_{1\mathrm{I}}$，$a_{1\mathrm{II}}$）を対角要素に有するマトリックスとする。すなわち，

$$\mathrm{A}_1\equiv\begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり，単位行列となる。また，

$\mathrm{A}_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$も単位行列である。

次に，支配代替案以外のすべての代替案からみた評価基準の重みベクトルを評価マトリックスの推定ルールから説明する。このとき，A_iは，

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} a_{i\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{i\mathrm{II}} \end{bmatrix} \qquad i=1,2,3$$

とする。ところで，支配型AHPに関するルールは次の2つである。

ルール1

$A_iA_1^{-1}b^1$：代替案$i(i\neq1)$からみた評価基準の重みベクトルの推定原理

ルール2

AA_i^{-1}：代替案iからみた評価マトリックスの推定原理

まず推定原理は次のように表現できる。

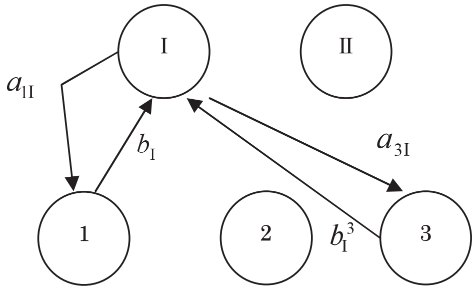
b_j^i（代替案iからみた評価基準jの重み）とb_j（支配代替案1からみた評価基準jの重み）の比は，a_{ij}（評価基準jからみた代替案iの評価値）とa_{1j}（代替案jからみた支配代替案1の評価値）の比に一致する。

上記の内容を式で証明すると（i＝3の場合），次のように表せる。

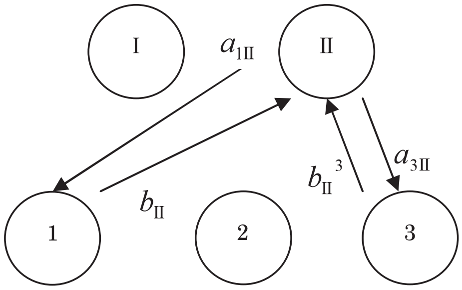
$$b^3=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^3 \\ b_{\mathrm{II}}^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & 1/a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}=A_3A_1^{-1}b^1$$

これは，以下の比例式から導かれる。（図4参照）

$$\frac{b_{\mathrm{I}}^3}{b_{\mathrm{I}}}=\frac{a_{3\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{I}}},\quad \frac{b_{\mathrm{II}}^3}{b_{\mathrm{II}}}=\frac{a_{3\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}}$$



$$\frac{b_{\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{II}}}=\frac{b_{\mathrm{I}}^3}{a_{3\mathrm{I}}}$$



$$\frac{b_{\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}}=\frac{b_{\mathrm{II}}^3}{a_{3\mathrm{II}}}$$

図4　比例式と関係図

たとえば，1章の例で計算すると，

$$b^3=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^3 \\ b_{\mathrm{II}}^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.923 \\ 0.077 \end{bmatrix}$$

となる。

次に，ルール2の推定原理は次のように表現できる。

すべての評価基準jに対して，代替案kに対する代替案iの相対評価は次のように示すことができる。 $\dfrac{\text{代替案}i\text{の評価値}}{\text{代替案}k\text{の評価値}}$ $=\dfrac{\text{代替案}i\text{の評価値}}{\text{代替案1の評価値}}\times\dfrac{\text{代替案1の評価値}}{\text{代替案}k\text{の評価値}}$ $=a_{ij}\times\dfrac{1}{a_{kj}}$

たとえば，代替案3からみた評価マトリックスは，

$$A^3=\begin{bmatrix}a_{1\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}}\\ a_{2\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}}\\ a_{3\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}}\\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}}\\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{3\mathrm{I}} & 0\\ 0 & a_{3\mathrm{II}}\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=AA_3^{-1}$$

となる。たとえば，1章の例で計算すると，

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1/2\\ 3 & 1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 6\\ 2/3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

となる。

最後に，代替案$i(i\neq 1)$からみた総合評価値ベクトルは，

$$AA_i^{-1}b^i=\underbrace{(AA_i^{-1})}_{\text{ルール2}}\underbrace{(A_iA_1^{-1}b^1)}_{\text{ルール1}}$$

となる。このことより，次の定理1を導くことができる。

> 定理：ルール1，2の下では，支配代替案からみた総合評価値ベクトルは，他の代替案から見た総合評価値ベクトルと一致する。

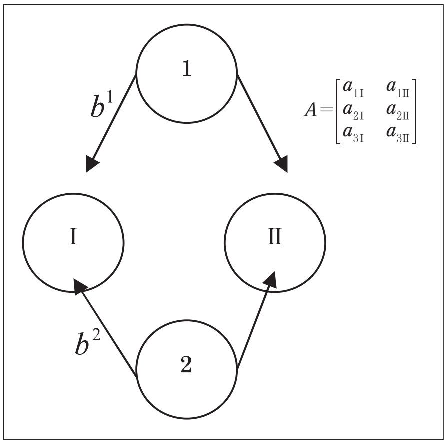
代替案1が支配代替案のときは，

$$Ab^1=AA_1^{-1}b^1=AA_i^{-1}A_iA_1^{-1}b^1$$
$$=(AA_i^{-1})(A_iA_1^{-1}b^1)$$

ルール2　ルール1　となる。

3　一斉法の数学的構造［3］

支配型AHPにおいて，複数の支配代替案が存在する場合を考える。たとえば，前述の例において，代替案1と代替案2が支配代替案と仮定する。このとき，代替案1からみた重みベクトルb^1，代替案2からみた重みベクトルb^2，さらに評価マトリックスAが与えられる。すなわち，入力データは，以下に示すようになる。



このとき，支配代替案1から支配代替案2への推定は, ルール1, ルール2から次のようになる。

重みベクトルの推定：ルール1により，

$$b^1\longrightarrow A_2A_1^{-1}b^1$$

となる。

評価マトリックスの推定：ルール2により，

$$AA_1^{-1}\longrightarrow AA_2^{-1}$$

となる。

一方，支配代替案2から支配代替案1への推定も同様にして求めることが出来る。

重みベクトルの推定：ルール1により，

$$b^2\longrightarrow A_1A_2^{-1}b^2$$

となる。

評価マトリックスの推定：ルール2により，

$$AA_2^{-1}\longrightarrow AA_1^{-1}$$

となる。

ここで，重みベクトルb^1と重みベクトルの推定値

$A_1A_2^{-1}b^2$に「ずれ」が生じる場合を考える。重

みベクトルb^2と重みベクトルの推定値$A_2A_1^{-1}b^1$との「ずれ」も同様である。このような「ずれ」が生じない場合は，1章でも述べたが「支配代替案間の互換性」と呼んでいる。しかし，現実には互換性が保たれることは稀で，「ずれ（ギャップ）」が生じることが多い。そこで，このような「ずれ」を調整する方法を，木下・中西は「一斉法」として提案している。

そこで，次に，「一斉法」について，すべての代替案が支配代替案の場合（前述した例では，代替案の数は3つ）を例として説明する。

まず，支配代替案1からみた重みベクトルの調整値b^1は，オリジナルデータb^{11}，支配代替案2からの推定値b^{12}，支配代替案3からの推定値b^{13}の平均値とする。すなわち，

$$b^1=\frac{1}{3}\{b^{11}+b^{12}+b^{13}\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_1A_1^{-1}b^1}{e^TA_1A_1^{-1}b^1}+\frac{A_1A_2^{-1}b^2}{e^TA_1A_2^{-1}b_2}+\frac{A_1A_3^{-1}b^3}{e^TA_1A_3^{-1}b_3}\right\}$$

となる。同様にして，支配代替案2，3からみた重みベクトル調整値b^2，b^3はそれぞれ次のようになる。

$$b^2=\frac{1}{3}\{b^{21}+b^{22}+b^{23}\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_2A_1^{-1}b^1}{e^TA_2A_1^{-1}b^1}+\frac{A_2A_2^{-1}b^2}{e^TA_2A_2^{-1}b^2}+\frac{A_2A_3^{-1}b^3}{e^TA_2A_3^{-1}b^3}\right\}$$

$$b^3=\frac{1}{3}\{b^{31}+b^{32}+b^{33}\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_3A_1^{-1}b^1}{e^TA_3A_1^{-1}b^1}+\frac{A_3A_2^{-1}b^2}{e^TA_3A_2^{-1}b^2}+\frac{A_3A_3^{-1}b^3}{e^TA_3A_3^{-1}b^3}\right\}$$

そして，新しい重みベクトルb^iと古い重みベクトルb^i($i=1, 2, 3$)との間に「ずれ（ギャップ）」がなくなるまでこの手順を繰り返すことにする。なお，この手順により，重みベクトルb^iが収束を有することは，参考文献［4］に詳述している。

また，「一斉法」の例として，

$$b^{11}=\begin{bmatrix}0.4\\0.6\end{bmatrix}\quad b^{22}=\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}\quad b^{33}=\begin{bmatrix}0.2\\0.8\end{bmatrix}$$

の場合を表13に示す。

表13　「一斉法」の例

	1		2		3	
	I	II	I	II	I	II
①	0.4	0.6	0.7	0.3	0.2	0.8
			0.727	0.273	0.923	0.077
	0.363	0.632			0.913	0.087
	0.014	0.986	0.053	0.947		
②	0.261	0.739	0.493	0.507	0.679	0.321
			0.585	0.145	0.864	0.136
	0.196	0.804			0.814	0.136
	0.105	0.895	0.319	0.681		
③	0.187	0.813	0.466	0.534	0.784	0.214
			0.479	0.521	0.806	0.194
	0.179	0.821			0.794	0.194
	0.169	0.831	0.449	0.551		
	0.178	0.822	0.465	0.535	0.796	0.204

この結果，収束値は，

$$b^1=\begin{bmatrix}0.178\\0.822\end{bmatrix}\qquad b^2=\begin{bmatrix}0.465\\0.535\end{bmatrix}$$

$$b^3=\begin{bmatrix}0.796\\0.204\end{bmatrix}$$

となる。

したがって，総合評価値はそれぞれ，

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&1/2\\3&1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.178\\0.822\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.767\\0.671\end{bmatrix}\text{（支配代替案1）}$$

$$\begin{bmatrix}1/2&2\\1&1\\3/2&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.465\\0.535\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.3025\\1\\0.8725\end{bmatrix}\text{（支配代替案2）}$$

$$\begin{bmatrix}1/3&6\\2/3&3\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.796\\0.204\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.4893\\1.1427\\1\end{bmatrix}\text{（支配代替案3）}$$

となる。しかし，上記3つの総合評価値は，正

規化すると，すべて

1	Ⅰ	Ⅱ
1	1	1
2	2	1/2
3	3	1/6

2	Ⅰ	Ⅱ
1	1/2	2
2	1	1
3	3/2	1/3

3	Ⅰ	Ⅱ
1	1/3	6
2	2/3	3
3	1	1

$$E=\begin{bmatrix}0.410\\0.314\\0.276\end{bmatrix}$$

となり一致する。

最後に，本研究において，貴重なご意見をいただいた故尾崎都司正先生に深謝いたします。

参考文献

［1］木下栄蔵，中西昌武：AHP における新しい視点の提案，土木学会論文集，No. 569/4-36, pp. 1-8,1997

［2］E. Kinoshita and M. Nakanishi: Proposal of New AHP Model in Light of Dominant Relationship among Alternatives, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 42, NO. 2, pp. 13-19, 1999

［3］木下栄蔵，中西昌武：支配代替案法における追加データの処理手法「一斉法」の提案，土木学会論文集No. 611/IV-42，pp. 13-19，1999

［4］E. Kinoshita, K. Sekitani, J. SHI: Mathematical Properties of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 45, No2, pp. 198-213, 2002