

不完全な評価行列における欠損値の推定手法の提案

Toshimasa OZAKI

Kanna MIWA

Keywords: Harker method, Nishizawa method, imperfect evaluation matrix, ANP

Summary: *There is a case in causing an imperfect evaluation matrix in the AHP. In the presumption of such the missing values, there are two methods; the Harker Method and the Nishizawa Method. However, we often hesitate to the estimation of which method is appropriate. This paper presented the presumption method of an imperfect evaluation matrix by the ANP, and showed the validity of the appropriate method. A new criteria matrix was defined from the matrix inverse of the evaluation matrix. Then, the 4th and 5th square matrix was taken up, and the validity of the proposed method was shown by numeric and mathematical principle analyses in this thesis. In addition, it was shown to be able to interpret not only the problem of presumption of the missing value alone but also the world of the AHP in the world of the ANP.*

1. はじめに

AHPでは、評価行列に欠損がないことが前提である。しかしながら、評価が困難な場合や、アンケートなどで評価値が得られにくい場合があり、必然的に不完全な評価行列を生じることになる。このような行列における欠損値の推定手法には、Harker法 (Harker, 1987) の他に、西澤 (Nishizawa, 2005) による一対比較の性質を利用した推定手法がある。これらの手法は、数学的あるいは、AHPの特性を利用したものであるが、その利用における条件が明確でないという問題がある。たとえば、Harker法ではどのような場合でも固有ベクトルが概ね求められ、欠損値の推定が可能である。一方、西澤の手法でも一対比較により、欠損値の推定が可能である。このようなとき、どちらの手法の推定値が適切であるかに迷うことが多い。

著者 (Ozaki et al., 2009a, 2009b) らは、欠損値のある3次の正方行列における単純不整合の問題でANPによって、優先順位が決定できることを見出している。本研究 (Ozaki and Miwa, 2009) は、Harkerや西澤とは異なったANPの視点で、不完全な評価行列の推定法を提案し、その推定値の妥当性に対する考え方を示し、頑強な手法を提案するものである。

2. 既往の手法における問題点

AHPの欠損行列を推定する2つの既往の手法とその問題点について簡単に述べる。

(1) Harker法 (Harker, 1987)

たとえば、欠損値を0とした不完全な評価行列 U を以下のように定義したとき、Harker法では、 U の行の「0」の個数分を対角に加算した行列 A をつくる。

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 1 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 1+1 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 1+1 \end{bmatrix}$$

行列 A の最大固有値に対する固有ベクトル $y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ を求め、欠損値を下記のように推定するものである。

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 1 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \langle y_1/y_3 \rangle & \langle y_1/y_4 \rangle \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ \langle y_3/y_1 \rangle & a_{32} & 1 & a_{34} \\ \langle y_4/y_1 \rangle & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

簡易的に固有ベクトルを幾何平均でとると、 $\sqrt[4]{a_{12}y_1^2y_3^{-1}y_4^{-1}}=y_1$, $\sqrt[4]{a_{32}a_{34}y_1^{-1}y_3}=y_3$, $\sqrt[4]{a_{42}a_{43}y_1^{-1}y_4}=y_4$ が誘導され、たとえば $y_4=\alpha$ とすると、最後の式から、 $y_1=\alpha^{-3}a_{42}a_{43}$ 、2番目の式から、 $y_3=\alpha \cdot \sqrt[3]{a_{32}a_{34}/a_{42}a_{43}}$ が求められる。最初の式に代入して、 α を求めることによって、つねに固有ベクトルが求められることになる。しかし、固有ベクトルの各成分は、どれかの成分に対する比率で表されることから、 α を固定するには矛盾がある。

いま、 $a_{12}=a_{23}=2$, $a_{24}=3$, $a_{34}=4$ とした欠損行列では、 $a_{13}=2.596$, $a_{14}=7.526$ が欠損値として算出されたが、この推定値に意味があるとは考えられない。

しかし、固有ベクトルが容易に求められることから、1987年に発表されて以来、これを凌駕する研究は殆ど皆無であり、AHPにおける欠損値の推定手法として定着している。

(2) 西澤の手法 (Nishizawa, 2005)

不完全な評価行列 U の最大固有値に対する固有ベクトルを $y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ とすると、

$$a_{ij}=y_i/y_j=\frac{y_k/y_j}{y_k/y_i}=a_{kj}/a_{ki} \text{ から, 下記の式によっ}$$

て推定値を算出するものである。

$$a_{ij}=(\prod (a_{kj}/a_{ki}))^{1/m} \quad (1)$$

ただし、数値がないところは幾何平均の対象から除外する。この手法は、2つの列のみによって欠損値を推定する手法であり、列の比を一定と見做すことによって行列の最大固有値が最小になるように計算していると考えられる。西澤の手法で、欠損値を求めると $a_{13}=(a_{23}/a_{21})$, $a_{14}=(a_{24}/a_{21})$ となる。しかし、固有ベクトルを幾何平均で求めると、 $a_{14}=\sqrt{a_{13}a_{24}a_{34}/a_{21}}$ であり、 a_{13} が未定であることから、解が存在しない。たとえば、 $a_{12}=a_{23}=2$, $a_{24}=3$, $a_{34}=4$ とした欠損行列では、比較値から $a_{13}=2$, $a_{14}=6$ として推定できる。しかし、この例のように2つ以上の比較値が存在しない場合は、推定値の信頼性は低くなる。

このように、いずれの手法でも欠損値が推定できるが、その数値に妥当性があるかどうかは、個別に検討することが必要であり、安易にこれらの手法を利用できないという問題点がある。しかし、AHPの特徴を生かした西澤の手法は簡単であり、優れた手法といえるが、幾何平均をとるのは、固有ベクトルを幾何平均で求めることに由来しているようであり、幾何平均を用いれば、両者は同じになる¹。

3. 本手法の基本的考え方

このような推定値の妥当性にかかわる問題点を解消するために、新たな手法論を提案す

る。いま、不完全な評価行列 U を考える。このとき、仮想的な意思決定者 $T_1 \sim T_4$ が4人おり、代替案 $A_1 \sim A_4$ を評価するとする。評価行列の各列は意思決定者 $T_1 \sim T_4$ の評価であり、各意思決定者は、3人のみの評価を行う。ただし、非評価対象者は重複しないものとする。

$$U = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13}^{-1} & a_{23}^{-1} & 1 & 0 \\ a_{14}^{-1} & a_{24}^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

たとえば、意思決定者 T_1 が A_1, A_3, A_4 に行列 U の第1列の評価をしたとき、代替案は、自分の評価をあげるために、他の代替案への評価の見直しを意思決定者 T_1 以外の他の意思決定者に迫ると考える。つまり、代替案から意思決定者を評価する。このとき、評価行列（要求行列）に対して適当な評価基準行列（不満行列） W を設定すれば、意思決定者と代替案の双方が満足できる合意が得られると考えるのが自然である。その評価基準行列に関しては、評価行列での過度な要求を是正する役割があり、反対の関係の設定が望ましいことになる。

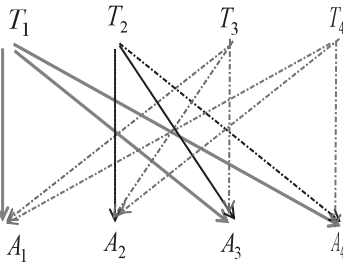


Fig. 1 Schematic of virtual idea of evaluation

そこで、 U の逆行列によって反対の関係をつくり、整合性を維持するため、評価されなかった欠損値を0とする評価基準行列 W を定義する。したがって、この W は当然 U の逆行列と

は異なる。

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & w_{13} & w_{14} \\ 0 & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & 0 \\ w_{41} & w_{42} & 0 & w_{44} \end{bmatrix} \quad (2)$$

意思決定者と代替案の双方が満足できる解は、この2つの行列を要素とする ANP の固有ベクトル x, z で表すと次式で表示される。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & w_{11} & 0 & w_{13} & w_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{31} & w_{32} & w_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{41} & w_{42} & 0 & w_{44} \\ 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/a_{14} & 1/a_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & W \\ U & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

この超行列は、 $Wz=kx$, $Ux=kz$ に分割でき、これから $UWz=k^2z$ が得られる。したがって、評価行列と評価基準行列をかけ合わせた行列 UW の固有ベクトルによって、欠損値を推定するのが本手法である。なお、欠損行列 U が $|U| < 0$ となる場合もあり、 $0 < |UW|$ とする。なお、前述した $a_{12}=a_{23}=2$, $a_{24}=3$, $a_{23}=4$ とした欠損行列に対して、本手法では、なんらの検討も必要とせず、欠損値の推定はできないという解が得られる。

4. 数値的解析による本手法論の検証

Harker や西澤の手法による欠損値は必ずしも一致しないが、本手法の妥当性を検証するには、これらの既存の手法との差がないことを数値的にまず確認することが必要である。そ

ここで、欠損行列を4次、5次の正方行列を設定し、非欠損項 $a \sim f$ には、1から9の正数を乱数によって25組発生させ、本手法の妥当性を検討した。

4.1 ケース1 4行4列での本手法の検証

そこで、欠損行列を

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ a^{-1} & c^{-1} & 1 & 0 \\ b^{-1} & d^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{とする。次数が大き}$$

くなると正方行列の固有ベクトルを解析的に求めるのは困難であり、各固有ベクトルが同じであるならばその時の固有値も同じであることから、4次の正方行列によって本手法 (*Matrix Solution*法) と、Harker法や西澤の手法との精度を最大固有値でチェックした。

i. *Matrix Solution* 法

ii. *Harker* 法

iii. *Nishizawa's Solution* 法

上の3つの手法から得られた欠損値を推定し、元の行列の最大固有値を分散分析した (Table 1.)。その結果、Regression 自由度2、

Residual 自由度72では、有意水準5%のF分布の値よりも観測された分散比は小さく、確率が1で有意水準よりも大きいことから、「本手法と他の2つ手法に差がある」が棄却されて、「推定値に差があるとは言えない」という結論が得られた。

4.2 ケース2 5行5列での本手法の検証

次に、欠損行列を

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & b & 0 \\ a^{-1} & 1 & c & 0 & d \\ 0 & c^{-1} & 1 & e & 0 \\ b^{-1} & 0 & e^{-1} & 1 & f \\ 0 & d^{-1} & 0 & f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \text{とする。}$$

前節と同様に、固有ベクトルから最大固有値のみで本手法の妥当性を分散分析によって調べた (Table 2.)。

この分散分析からも、「手法に差がある」が棄却されて、「差があるとは言えない」という結論が得られた。

このようにいずれのケースにおいても、本手法による推定値は他の手法と「差があるとは言えない」という統計的な結論を得て手法の妥当

Table 1. Analysis of variance

Source	Sum of Squares	Deg. of Freedom	Mean Square	F value	Pr(>F)	F
Regression	1.42419E-12	2	7.12097E-13	1.84044E-11	1	3.123907449
Residual	2.785796736	72	0.038691621			
Total	2.785796736	74				

Table 2. Analysis of variance

Source	Sum of Squares	Deg. of Freedom	Mean Square	F value	Pr(>F)	F
Regression	0.067543929	2	0.033771965	0.091827103	0.912369527	3.123907449
Residual	26.47999735	72	0.367777741			
Total	26.54754128	74				

性が間接的に確認された。

5. 本手法の数理的妥当性の検討

数値的な検討によって、「本手法と他の手法による推定値に差があるとは言えない」という前章の統計的帰結は、「本手法の妥当性を否定できない」とどまり、他の手法と同等であるとは言えない。したがって、本手法の妥当性には数理的な検証が不可欠である。数理的な検討においては一般解を求めるのが通常であるが、 n 次の正方行列の逆行列では、必然的に展開項が多くなるのが避けられない。 UW の固有値を求める場合にも、これらの項の処理の煩雑さをとまなう。したがって、本報では本手法の妥当性に焦点を当て、欠損行列の次数を4と5に、また欠損位置も設定して、展開項の煩雑さを回避することとする。

5.1 ケース1 4行4列での本手法の検証

(1) ANP行列での固有ベクトルの算出

欠損値のある行列を前章の数理的解析のケース1とし、ANP行列における UW の固有ベクトルを求める。

$$UW = \begin{bmatrix} -S & -ac^{-1}bd^{-1} & -a-bcd^{-1} & -ac^{-1}d-b \\ -b^{-1}d-a^{-1}c & -S & -ab^{-1}d-c & -a^{-1}bc-d \\ -a^{-1}b^{-1}c^{-1}d & -a^{-1}bd^{-1}-c^{-1} & -S & -a^{-1}b-c^{-1}d \\ -a^{-1}cd^{-1}-b^{-1} & -ab^{-1}c^{-1}-d^{-1} & -ab^{-1}-cd^{-1} & -S \end{bmatrix}$$

ただし、 $-S = -1 - ab^{-1}c^{-1}d - a^{-1}bcd^{-1}$ とする。

この行列の固有ベクトルを $z_4=1$ として、他の成分を幾何平均で求めると、 $z_1 = \sqrt[4]{a^3b^3c^{-1}d^1}$ 、 $z_2 = \sqrt[4]{a^{-1}bcd^3}$ 、 $z_3 = \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2}$ が得られる²。

(2) AHP行列での最大固有値の算出

欠損値は、固有ベクトルの比として、 $z_1/z_2 = \sqrt[4]{a^2b^2c^{-2}d^{-2}}$ 、 $z_3 = \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2}$ を欠損値行列に代入して、

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt[4]{a^2b^2c^{-2}d^{-2}} & a & b \\ \sqrt[4]{a^{-2}b^{-2}c^2d^2} & 1 & c & d \\ a^{-1} & c^{-1} & 1 & \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2} \\ b^{-1} & d^{-1} & \sqrt[4]{a^2b^{-2}c^2d^{-2}} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

から固有値 $\lambda = 2 + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}}$ を得る。

(3) Harker法との関連性

Harker法による固有値および固有値ベクトルをそれぞれ、 k 、 $x(x_1, x_2, x_3, x_4=1)$ とする

$$\text{と、 } x_1 = -\frac{ac^{-1}d+b((2-k)^2-1)}{(2-k)((2-k)^2-2)},$$

$$x_2 = -\frac{a^{-1}bc+d((2-k)^2-1)}{(2-k)((2-k)^2-2)}, x_3 = \frac{a^{-1}b+c^{-1}d}{(2-k)^2-2}$$

である³。

(2) で得られた固有値を $\lambda=k$ として、 x_1, x_2, x_3 を求めると、 $x_1 = \sqrt[4]{a^1b^3c^{-1}d^1}$ 、 $x_2 = \sqrt[4]{a^{-1}bcd^3}$ 、 $x_3 = \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2}$ となり、それらは、本手法の固有ベクトルの成分 z_1, z_2, z_3 に等しいことが誘導される⁴。

(4) 西澤の手法

(1) 式から、

$$a_{12} = \sqrt{(a_{32}/a_{31})(a_{42}/a_{41})} = \sqrt{abc^{-1}d^{-1}},$$

$$a_{34} = \sqrt{(a_{14}/a_{13})(a_{24}/a_{23})} = \sqrt{a^{-1}bc^{-1}d} \text{ となり、本手法による推定値と同じ結果が得られる。}$$

すなわち、本手法は、欠損行列と評価基準行列のバランスによって、欠損値を求めていて、その欠損値の推定値は、Harker法や西澤の手法と同じ推定値であることが示される。

5.2 ケース2 5行5列の数理的検討

(1) 本手法による欠損値の推定

欠損値のある行列を4.2のケース2と同様とし、 UW を算出する。この行列の要素の各行の幾何平均をとると、各固有ベクトル z の成分 $z_1 \sim z_4$ は次のような式であらわされる⁵。

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \sqrt{(ade^{-1}f^{-1}+bcd^{-1}f)(a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acd^{-1}f^{-1})^{-1}a^2b^2d^2f^2} \\
 z_2 &= \sqrt{a^{-1}cd^{-1}fe+a^{-1}c^{-1}de^{-1}f^{-1}+b^{-1}ce+b^{-1}df^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{ab^{-1}cdf^{-1}+a^{-1}bcd^{-1}f+a^{-1}be^{-1}+de^{-1}f^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{a^{-1}b+ce+df^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{ab^{-1}cde+a^{-1}bc^{-1}de^{-1}+a^{-1}bf+cef} \\
 &\quad \times \sqrt{a^{-1}c^{-1}e^{-1}f^{-1}+b^{-1}cd^{-1}e} \\
 &\quad \times \sqrt{d^{-1}+ab^{-1}f^{-1}+c^{-1}e^{-1}f^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1}} \sqrt{a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1}} \\
 z_3 &= \sqrt{(a^{-1}d^{-1}ef+b^{-1}c^{-1}df^{-1})(a^{-1}c^{-1}e^{-1}f^{-1}+b^{-1}cd^{-1}e)^{-1}c^{-2}d^2e^2f^2} \\
 z_4 &= \sqrt{a^{-1}c^{-1}e^{-1}+a^{-1}d^{-1}f+b^{-1}cd^{-1}fe+b^{-1}c^{-1}de^{-1}f^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{ab^{-1}+fd^{-1}+c^{-1}e^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{ab^{-1}cef+a^{-1}bc^{-1}e^{-1}f+ab^{-1}d+dc^{-1}e^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{ab^{-1}c+ab^{-1}de^{-1}f^{-1}+a^{-1}bd^{-1}e^{-1}f+cf d^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{a^{-1}c^{-1}e^{-1}f^{-1}+b^{-1}cd^{-1}e} \\
 &\quad \times \sqrt{d^{-1}+ab^{-1}f^{-1}+c^{-1}e^{-1}f^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1}} \\
 &\quad \times \sqrt{a^{-1}bd^{-1}+ced^{-1}+f^{-1}}
 \end{aligned}$$

ところで、欠損値の推定には、 UW の固有ベクトルのうち、 z_1 , z_3 および z_2/z_4 の比を求めればよい。簡略化できていない z_1 の根号の中の項を幾何平均で近似すると $ade^{-1}f^{-1}+bcd^{-1}f \cong 2\sqrt{abce^{-1}}$ および $a^{-1}bc^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1} \cong 2\sqrt{cd^{-1}e^{-1}f^{-1}}$ となり、これを代入すると最終的には $z_1 \cong \sqrt[5]{abdf a^2 b^2 d^2 f^2} = \sqrt{abdf}$ と簡略化できる。また、 z_3 も同様に幾何平均をもちいて、 $z_3 \cong \sqrt[5]{c^{-1}def c^{-2} d^2 e^2 f^2} = \sqrt{c^{-1}def}$ を得る。しかし、 z_2 , z_4 を z_1 や z_3 のように簡略化することは難しいが、欠損値の推定には、固有ベクトルの比のみが分かればよいから、 z_2 の z_4 との比をとり、幾何平均を繰り返すと次式が得られる⁶。

$$\begin{aligned}
 z_2/z_4 &= (a^{-1}bcdef^{-1} \sqrt[3]{a^{-2}b^2c^2d^2e^2f^{-2}})^{1/5} \\
 &= a^{-1}bcdef^{-1}
 \end{aligned} \quad (3)$$

以上で、本手法から欠損値を解析的に誘導できたが、これが妥当であるかどうかを既存の手法でチェックする。

(2) Harkerの手法によるチェック

Harkerの行列における固有ベクトルの成分を $x_1 \sim x_4$ とする。最大固有値から固有ベクトルを求める前節の手法では、共通な最大固有値を求めることができないため、Harkerの行列は、欠損値を固有ベクトルで表示した行列と同じであることを用いて検討する。

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} 3x_1+ax_2+bx_4 \\ a^{-1}x_1+2x_2+cx_3+d \\ 3x_3+c^{-1}x_2+ex_4 \\ b^{-1}x_1+2x_4+e^{-1}x_3+f \\ 3+d^{-1}x_2+f^{-1}x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & \frac{x_1}{x_3} & b & x_1 \\ a^{-1} & 1 & c & \frac{x_2}{x_4} & d \\ \frac{x_3}{x_1} & c^{-1} & 1 & e & x_3 \\ b^{-1} & \frac{x_4}{x_2} & e^{-1} & 1 & f \\ \frac{1}{x_1} & d^{-1} & \frac{1}{x_3} & f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

右の行列の固有ベクトルは、幾何平均によって容易に算出できる。 $x_1 = \sqrt[5]{abdfx_1^3}$, $x_2 = \sqrt[5]{a^{-1}cd^2fx_1x_2x_3x_4^{-1}}$, $x_3 = \sqrt[5]{c^{-1}defx_3^3}$ および $x_4 = \sqrt[5]{b^{-1}de^{-1}f^2x_1x_2^{-1}x_3x_4}$ である。次に、各成分を $a \sim f$ で表示する。 $\sqrt[5]{abdfx_1^3} = x_1$ から $x_1 = \sqrt{abdf}$ 、同様に $\sqrt[5]{c^{-1}defx_3^3} = x_3$ から $x_3 = \sqrt{c^{-1}def}$ が得られる。これらは、本手法における z_1 , z_3 である。また、 $\sqrt[5]{a^{-1}cd^2fx_1x_2x_3x_4^{-1}} = x_2$ から $x_2^4x_4 = a^{-1}cd^2fx_1x_3$ を得る。さらに、 $\sqrt[5]{b^{-1}de^{-1}f^2x_1x_2^{-1}x_3x_4} = x_4$ から $x_4^4x_2 = b^{-1}de^{-1}f^2x_1x_3$ を得て、この2つの式の比をとると、 $\frac{x_2^4x_4}{x_4^4x_2} = \frac{x_2^3}{x_4^3} = \frac{a^{-1}cd^2fx_1x_3}{b^{-1}de^{-1}f^2x_1x_3} = a^{-1}bcdef^{-1}$

を得る。すなわち、 $\frac{x_2}{x_4} = \frac{z_2}{z_4}$ となり、本手法による欠損値の推定値はHarker法と同じであることが示される。なお、Harker法による固有ベクトル x_2, x_4 をそれぞれ求めてみる。 $x_2 = \sqrt[3]{a^{-1}bcdef^{-1}}x_4$ を $x_2^4x_4 = a^{-1}cd^2fx_3$ に代入すると、 $x_4 = \sqrt[6]{ab^{-1}c^{-1}d^2e^{-1}f^4}$ が得られる。したがって、 $x_2 = \sqrt[6]{a^{-1}bcd^4ef^2}$ となる。一方、本手法を幾何平均によって簡略化すると、 z_2, z_4 のいずれにも $\sqrt[5]{16/3}$ の係数がついて、 $z_2 = \sqrt[5]{\frac{16}{3}} \sqrt[6]{a^{-1}bcd^4ef^2}$ および $z_4 = \sqrt[5]{\frac{16}{3}} \sqrt[6]{ab^{-1}c^{-1}d^2e^{-1}f^4}$ となる。たとえば、 $(a, b, c, d, e, f) = (\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, 9, \frac{1}{2})$ が既知の欠損行列に本手法を適用すると、幾何平均によって得られた固有ベクトルは、 $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (0.58088, 2.5562, 5.22796, 0.77517, 1)$ である。また、Harkerの行列をPower法で求めると最大固有値が5.45513のとき、固有ベクトルは、 $(0.57538, 2.22077, 5.17814, 0.76163, 1)$ である。しかし、前述した x_2 では、 $x_2 = \sqrt[6]{a^{-1}bcd^4ef^2} = 1.817121$ であり、これに $\sqrt[5]{16/3}$ を掛けると、はじめて $1.817121 \cdot \sqrt[5]{16/3} = 2.539706$ となって z_2 に近くなる。すなわち、本節のHarkerの行列では、 x_2 と x_4 の比を求めたため、係数が相殺されていることが分かる。 UW の各行の幾何平均をとり、それらの各要素を最大にすれば、Harkerの手法による欠損値の推定値と一致する。

(3) 西澤の手法によるチェック

西澤の手法では、 $a_{ij} = (\Pi(a_{kj}/a_{ki}))^{1/m}$ から、 $a_{13} = z_1/z_3 = \sqrt{abce^{-1}}$ 、 $a_{15} = z_1 = \sqrt{abdf}$ 、 $a_{24} = z_2/z_4 = \sqrt[3]{a^{-1}bcdef^{-1}}$ が導出され、本手法から得られる推定値は西澤のそれと同じである。

以上の数理的検討から、本手法は固有ベクトルに幾何平均をとれば、Harkerや西澤の欠損値の推定値と同じ値をとることが数理的に誘導でき、ANPを利用した欠損値の推定法としてその妥当性が検証された。

6. 検討と考察

本手法における妥当性を検証する過程で、いくつかの検討事項が浮上してきたので、それらについて検討を行う。

(1) 5行5列の欠損行列における幾何平均による簡素化

ケース2の5行5列の欠損行列における数理的検討では、幾何平均による固有ベクトルの簡素化を必要としたのは、ケース1の4行4列の欠損行列とは異なって、欠損値が各行で同じ個数でなかったためと考えられる。ケース1では最大固有値が $\lambda = 2 + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}}$ であり、Harkerの式での固有ベクトルも容易に算出できた。しかし、5行5列の欠損行列では、Harkerの式での固有ベクトルをみても、それに伴う余分な項が発生し、簡素化する必要があったためであろう⁷。

(2) 一般解への展開

本報では n 次の正方行列の逆行列の一般解による展開項の処理の煩雑さを回避し、本手法の妥当性に焦点を当てて、欠損行列の次数を4と5に、また欠損位置も与件とした。したがって、この証明も欠損位置に依存した限定解であると思なすことができる。

しかし、たとえば、 $a \sim b$ を欠損値とした4次の欠損個数と欠損位置を変えた正方行列を作り、それぞれの手法による欠損値の推定を試みる。ただし、欠損位置(Blank)は、同一の行では列を優先させて、Blank1, Blank2というように定義する。

Harker法や西澤の手法では、すべて欠損値が推定されるのに較べて、本手法では、 UW の固有ベクトルが算出できず、推定も限定されている。しかし、西澤の手法で2個以上の一対比較値がある場合の推定値は、本手法のそれとほぼ同様であるところから、本手法はきわめて厳格な推定方法である。

本手法では、No. 1～No. 5, No. 9およびNo. 12～No. 17で固有ベクトルが存在しないということは、欠損行列と評価基準行列との間に合意が成立していなくて談判決裂という状況を示していると考えられる。合意が成立するのは、本手法で解が存在するNo. 6～No. 8, No. 10, No. 11, およびNo. 18～No. 23である。ただ、No. 6, No. 7およびNo. 10では、本手法とHarker法において、欠損値を推定した、元の欠損行列 U の最大固有値を求めると、Harker法ではすべて4であるが、本手法では、推定値に差があり、4.0582, 4.0582および4と若干の差がでている。どちらの手法による推定値が妥当なのかを判断する必要がある。そこで、欠損行列と評価基準行列との間に合意が成立せず、談判決裂という状況では、欠損行列 U に0が多く、評価基準行列も0が多くなり、合意するための情報が不足しているものと考えられる。No. 6とNo. 7では、評価基準行列に新たに0が増えて、評価基準行列は何の機能も果たさなくなる。判断基準をもたない場合には、欠損行列の要求を拒否するか、もしくは是認するかのどちらかであり、No. 6, No. 7およびNo. 10は、後者を示していると考えられる。

また、No. 18～No. 23において、評価基準行列の要素に負の値がある。推定された欠損値は、Harker法や西澤の手法とほぼ同じであるところから、負の要素に意味があると考えられる。 $UWz = k^2z$ から、固有ベクトルは正でなければ

ならないが、欠損値行列のDeterminantは負の値も取り得る。このとき、 W のDeterminantは負となり、結果的に UW のDeterminantは正となる。これは、評価基準が U も W も異なっているためと考えられる。この問題は、評価値がすべて正という条件の意思決定問題が、負の評価値の問題を扱うことができることを意味しているといえ、新たに別途検討する必要がある。

このように本手法の一般解への展開を考えると、欠損行列から評価基準行列をつくり、 UW の固有ベクトルが求められなければ、欠損値を推定することはできない。したがって、本手法は欠損値が存在するかどうかを判定するものであり、同時に欠損値を推定するものでもあるといえる。したがって、Harker法や西澤の手法の妥当性をチェックできるものでもある。

Table 3. Presumption of missing value by arbitrary loss position

U					W				Harker				Nishizawa				Proposed Method			
									Blank1	Blank2	Blank3	Eigenvalue	Blank1	Blank2	Blank3	Eigenvalue	Blank1	Blank2	Blank3	Eigenvalue
1	1	0	5	0	1	0	0	0	3.137	12.992		4.083	2.500	20.000		4.123	Real number	solution	none	
	0	1	2	3	0	-0.96	-1.2	7.68												
	0.2	0.5	1	4	0	0.8	0	-2.4												
	0	0.333	0.25	1	0	0.12	0.4	-0.96												
2	1	0	0	4	1	0	0	0	0.865	1.254		4.082	1.333	1.000		4.123	Real number	solution	none	
	0	1	2	3	0	-0.96	0.72	4.8												
	0	0.5	1	4	0	1.28	-0.96	-2.4												
	0.25	0.333	0.25	1	0	-0.2	0.4	0												
3	1	0	5	4	-0.31	0	-1.25	6.25	1.882	3.576		4.234	2.500	8.000		4.340	Real number	solution	none	
	0	1	2	0	0	1	0	0												
	0.2	0.5	1	4	0.25	0	0	-1												
	0.25	0	0.25	1	0.016	0	0.313	-0.31												
4	1	0	5	4	-0.31	0	0.313	5	2.983	0.997		4.233	1.333	0.750		4.340	Real number	solution	none	
	0	1	0	3	0	1	0	0												
	0.2	0	1	4	0.313	0	-0.31	-1												
	0.25	0.333	0.25	1	-0.06	0	0.313	0												
5	1	2	0	0	1	0	0	0	2.598	7.532		4.083	4.000	6.000		4.123	Real number	solution	none	
	0.5	1	2	3	0	0	-1.2	4.8												
	0	0.5	1	4	0	0.8	-0.96	1.44												
	0	0.333	0.25	1	0	-0.2	0.64	-0.96												
6	1	2	0	0	1	0	0	0	1.501	6.005	0.750	4.000	1.500	6.000	0.750	4.000	1.500	3.709	1.214	4.059
	0.5	1	0	3	0	0	0	3												
	0	0	1	4	0	0	1	0												
	0	0.333	0.25	1	0	0.333	0	0												
7	1	2	0	0	1	0	0	0	4.000	16.000	8.000	3.998	4.000	16.000	8.000	4.000	2.472	16.000	12.944	4.056
	0.5	1	2	0	0	0	2	0												
	0	0.5	1	4	0	0.5	0	0												
	0	0	0.25	1	0	0	0	1												
8	1	2	0	0	0.5	1	0	0	4.000	6.006	1.502	3.999	4.000	6.000	1.500	4.000	4.000	6.000	1.500	4.000
	0.5	1	2	3	0.25	-0.5	1	1.5												
	0	0.5	1	0	0	0.25	0.5	0												
	0	0.333	0	1	0	0.167	0	0.5												
9	1	2	5	4	0	0	-1.25	5	1.118	2.657		4.234	2.500	2.000		4.340	Real number	solution	none	
	0.5	1	0	0	0	1	0	0												
	0.2	0	1	4	0.25	0	-0.31	0.25												
	0.25	0	0.25	1	-0.06	0	0.391	-0.31												
10	1	2	5	4	-0.5	1	2.5	2	2.500	2.000	0.800	4.000	2.500	2.000	0.800	4.000	2.500	2.000	0.800	4.000
	0.5	1	0	0	0.25	0.5	0	0												
	0.2	0	1	0	0.1	0	0.5	0												
	0.25	0	0	1	0.125	0	0	0.5												
11	1	2	5	0	0.216	1.439	0.324	0	10.961	1.370		4.091	10.954	1.369		4.090	10.929	1.369		4.089
	0.5	1	0	3	0.032	0.216	0	2.158												
	0.2	0	1	4	0.144	0	0.216	0.259												
	0	0.333	0.25	1	0	0.022	0.18	0.216												
12	1	0	0	4	1	0	0	0	0.865	1.254		4.0863	1.333	1.000		4.123	Real number	solution	none	
	0	1	2	3	0	-0.96	0.72	4.8												
	0	0.5	1	4	0	1.28	-0.96	-2.4												
	0.25	0.333	0.25	1	0	-0.2	0.4	0												

	U				W				Harker				Nishizawa				Proposed Method			
									Blank1	Blank2	Blank3	Eigenvalue	Blank1	Blank2	Blank3	Eigenvalue	Blank1	Blank2	Blank3	Eigenvalue
13	1	2	0	0	1	0	0	0	2.598	7.532		4.083	4.000	6.000		4.123				Real number solution none
	0.5	1	2	3	0	0	-1.2	4.8												
	0	0.5	1	4	0	0.8	-0.96	1.44												
	0	0.333	0.25	1	0	-0.2	0.64	-0.96												
14	1	2	5	0	-20	50	-20	0	18.669	8.666		4.006	20.000	8.000		4.006				Real number solution none
	0.5	1	2	0	8	-20	10	0												
	0.2	0.5	1	4	1	-2	0	0												
	0	0	0.25	1	0	0	0	1												
15	1	2	0	4	-6	-4	0	36	3.557	1.287		4.014	4.000	1.500		4.021				Real number solution none
	0.5	1	2	3	1.5	0	0	-6												
	0	0.5	1	0	0	0	1	0												
	0.25	0.333	0	1	1	1	0	-6												
16	1	2	5	4	0	0	-1.25	5	1.118	2.657		4.234	2.500	2.000		4.340				Real number solution none
	0.5	1	0	0	0	1	0	0												
	0.2	0	1	4	0.25	0	-0.31	0.25												
	0.25	0	0.25	1	-0.06	0	0.391	-0.31												
17	1	2	0	4	-6	-4	0	36	3.557	1.287		4.014	4.000	1.500		4.021				Real number solution none
	0.5	1	2	3	1.5	0	0	-6												
	0	0.5	1	0	0	0	1	0												
	0.25	0.333	0	1	1	1	0	-6												
18	1	0	5	4	0.272	0	-0.43	3.261	2.018			4.245	1.826			4.244	1.826			4.244
	0	1	2	3	0	0.835	-0.78	1.67												
	0.2	0.5	1	4	0.163	0.278	-0.26	-0.44												
	0.25	0.333	0.25	1	-0.02	-0.13	0.435	-0.26												
19	1	2	0	4	-1	-0.8	0	9.6	1.914			4.132	2.000			4.132	2.000			4.132
	0.5	1	2	3	1.2	0.96	-0.24	-6.72												
	0	0.5	1	4	0	0.64	-0.16	-0.48												
	0.25	0.333	0.25	1	-0.1	-0.28	0.32	0.96												
20	1	2	5	0	-1.92	7.692	-4.62	0	10.406			4.110	10.954			4.110	11.020			4.110
	0.5	1	2	3	-0.46	1.846	-2.31	3.692												
	0.2	0.5	1	4	0.769	-2.28	1.846	-0.55												
	0	0.333	0.25	1	0	-0.05	0.308	-0.09												
21	1	2	5	4	-0.58	-3.08	-0.29	12.69	1.190			4.229	1.369			4.227	1.369			4.227
	0.5	1	0	3	0.346	1.846	0	-4.62												
	0.2	0	1	4	0.192	0	0.096	-0.23												
	0.25	0.333	0.25	1	-0.02	0.231	0.24	-0.58												
22	1	2	5	4	-1	2	0	4	3.468			4.237	4.000			4.234	4.000			4.234
	0.5	1	2	0	-1.6	3.2	2	0												
	0.2	0.5	1	4	1.05	-1.6	-1	-0.2												
	0.25	0	0.25	1	-0.01	0	0.25	0.05												
23	1	2	5	4	5.217	-9.57	-6.96	7.826	1.088			4.026	1.095			4.026	1.095			4.026
	0.5	1	2	3	-3.39	5.217	6.522	-2.09												
	0.2	0.5	1	0	0.652	-0.7	-0.87	0												
	0.25	0.333	0	1	-0.17	0.652	0	-0.26												

(3) 本手法の頑強性の提案

本手法は、評価行列の逆行列を基調とした評価基準行列を定義し、評価行列と評価基準行列とで欠損値を推定するものである。この方法

は、評価行列の情報が不完全であるときには、ANPでの解がなく、双方の行列間で合意を示す固有ベクトルが得られず、推定値を利用する上で柔軟性に欠けるとの批判は免れない。そこ

で、この手法をABIA (ANP Based on Inverse Alternative) と名付けて欠損値の多い評価行列の推定法を検討する。

(i) No. 1 (Table3)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & 5 & b \\ 1/a & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/b & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

この推定値は、Harker法では、 a, b はそれぞれ、3.127, 12.99で最大固有値が4.083である。また、西澤の方法では、2.5, 20で最大固有値が4.123であるが、本提案手法では解がない。

そこで、評価行列 U と評価基準行列 W の合意状況を考慮する。 a, b に何らかの情報があれば合意が成立する。すなわち、欠落している情報を補うことを考える。つまり、暫定的に情報を与えることにする。

$a=1$ とすると、

$$U_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/b & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \text{となり、}$$

$$U_a W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2.60870 \\ 0.13043 & 1 & 0 & 2.60870 \\ 0.17391 & 6.9E-17 & 1 & 0.52174 \\ 0.04348 & 1.7E-17 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

この $U_a W$ の固有ベクトルは(0.720826, 1, 0.516397, 0.93058)であらわされる。したがって、 $a=1$, $b=0.720826/0.93058=7.745967$ となる。本来のABIA法では、固有ベクトルから、 $a=0.720826$ でなければならない。両者が同一になれば前提とした情報のもとで、合意が成したことになる。

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 7.7459 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/7.7459 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

この U_e の最大固有値は、4.229333365である。合意をするためには、推定したAHP評価行列の最大固有値が最小、すなわち、C. Iが最小でなければならない。

目的関数： U_e のC. Iを最小

変数： a

の最適化問題に変換できる。 $a=3.4668$ とすると、 U_e の最大固有値は、4.081423で最小となり、 $U_a W$ の固有ベクトルは(1, 0.4965, 0.4773, 0.0693)が得られる。この固有ベクトルから b を推定すると、 $b=1/0.0693=14.4225$ となる。ABIA法での固有ベクトルから検算すると、 $a=1/0.4965=2.0141$ であり、 $a=3.4668$ とずれが生じている。これは、元の行列が完全整合でないために生じたものである。

今度は、欠落している情報を b で補うことにする。 $b=14.4225$ のとき、 $a=3.4668$, U_e の最大固有値は、4.081423で a, b は、どちらも同じになる。したがって、Harker法や西澤の方法よりも、C. Iが小さくなる。

(ii) No. 2 (Table3)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 4 \\ 1/a & 1 & 2 & 3 \\ 1/b & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

この推定値は、Harker法では、 a, b は、0.865, 1.254で最大固有値が4.082。また、西澤の方法では、1.3333, 1で最大固有値が4.1226であるが、本来のABIA法では解がないものである。

$a=0.9615$ とすると、 $U_a W$ の固有ベクトル(0.4029, 1, 0.2905, 0.1733)から求められる推

定値 $b=0.4029/0.2905=1.3867$ となり、 U の最大固有値は、4.0814で最小となる。

$b=1.3867$ とすると、 $U_b W$ の固有ベクトル(0.8057, 0.8380, 1, 0.4808)から求められる推定値 $a=0.8057/0.8380=0.9615$ となり、 U の最大固有値は、同じく4.0814で最小となる。

(iii) No. 6 (Table3)

欠損値が、 a, b, c の3つのケースで情報不完全でも合意があるケースである。

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 1/2 & 1 & c & 3 \\ 1/a & 1/c & 1 & 4 \\ 1/b & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

この推定値は、Harker法では、 a, b, c は、1.501, 6.005, 0.75で最大固有値が4。また、西澤の方法では、1.5, 6, 0.75で最大固有値が4であるが、ABIA法では、1.5, 3.708, 1.214で最大固有値が4.09である。

ABIA法における評価基準行列は

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{となり、合意を形成す}$$

るには U に欠損値が多すぎることが原因である。

そこで、 $a=1.5$ のとき、 $U_a W$ の固有ベクトル(1, 0.5, 0.6667, 0.1667)から求められる推定値 $b=1/0.1667=6$ となり、 $c=0.5/0.6667=0.75$ 。 U の最大固有値は、4が最小となる。このとき、固有ベクトルから推定される a は、 $1/0.6667=1.5$ が得られる。

次に、 $b=0.622713$ のときは、 $a=c=0.029007$ で、最大固有値は、5.359905が最小となる。最後に、 $c=11.1545$ のときは、 $a=b=218.0969$ で、最大固有値は、6.0039が最小となる。

したがって、C. Iが最も小さいのは、 $a=1.5$ のときであり $b=6, c=0.75$ で、 U の最大固有値は、4である。したがって、元のABIA法による推定値 a, b, c は、1.5, 3.708, 1.214で最大固有値4.09が修正される。

これで、ABIA法の欠損値が多いときの対応を図ることができる。

7. 結論

本研究は、欠損値の推定を評価行列 U (要求行列)に対して適当な評価基準行列(不満行列) W を設定し、意思決定者と代替案の双方が満足できる合意点をANPの固有ベクトルとして求めようとするものである。その評価基準行列 W は、評価行列と反対の関係を前提として、評価されなかった欠損値を0とするものである。

不完全な評価行列における欠損値の推定法には、Harker法および西澤の方法があるが、本方法は、欠損値が推定できる場合には、Harker法および西澤の方法と基本的に同じである。しかし、Harker法および西澤の方法にくらべて、ANPによる合意を解とするところから、推定の根拠を明確に示すことができる点で優れていると考えられる。さらに、欠損値の推定値ができない状況を合意形成が成立しない状況と解釈することによって、意思決定手法の新たなタイプを示している。

本方法は、意思決定に基づく欠損値の推定法であり、きわめて人間の意思決定の仕方と酷似していることが示唆される。

最後に、意思決定とは何か、人間とは何かを社会科学的に追及する上で、AHPやANPの構造をより深く追求していくには、このような角度の異なった考え方が参考になることを願って

やまない。

なお、本研究は、著者の1人が名古屋学院大学の在外研修の機会を得て研究した成果の1部であることも付記しておく。

注

(1) 簡単にするため、欠損行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ x^{-1} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ とし、幾何平均による}$$

固有ベクトルを $z_1 \sim z_4$ とする。

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{a_{11}a_{12}a_{13}x} \text{ および } z_4 = \sqrt[4]{x^{-1}a_{42}a_{43}a_{44}} \text{ から、} \\ \text{欠損値 } x \text{ は、 } z_1/z_4 \text{ で与えられる。これは、 } a_{14} &= \\ z_1/z_4 \cdot \frac{z_k/z_4}{z_k/z_1} &= a_{k4}/a_{k1} \text{ から、1列と4列の比較だけ} \\ \text{でよいことを意味している。したがって、} \\ x = z_1/z_4 &= \sqrt[4]{a_{11}a_{12}a_{13}x} / \sqrt[4]{x^{-1}a_{42}a_{43}a_{44}} \\ &= \sqrt[4]{x^2 a_{11}a_{12}a_{13} / a_{42}a_{43}a_{44}} \text{ であり、 } a_{ij} = 1/a_{ji} \text{ をもち} \\ \text{いると、 } x &= \sqrt{a_{12}a_{13} / a_{42}a_{43}} = \sqrt{a_{24}a_{34} / a_{21}a_{31}} \text{ と な} \\ \text{り、 } a_{14} &= \Pi(a_{k4}/a_{k1})^{1/2} \text{ で推定できる。} \end{aligned}$$

(2) 幾何平均で各固有ベクトルを求める。

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{\frac{(ac^{-1}+bd^{-1})(a+bcd^{-1})(ac^{-1}d+b)}{(a^{-1}cd^{-1}+b^{-1})(ab^{-1}c^{-1}+d^{-1})(ab^{-1}+cd^{-1})}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{ac^{-1}bd^{-1}(a^{-1}c+b^{-1}d)abcd^{-1}(a^{-1}+b^{-1}c^{-1}d)}{(a^{-1}cd^{-1}+b^{-1})(ab^{-1}c^{-1}+d^{-1})}} \\ &= \frac{ac^{-1}db(a^{-1}cd^{-1}+b^{-1})}{(ab^{-1}+cd^{-1})} \\ &= \sqrt[4]{\frac{ac^{-1}bd^{-1}abcd^{-1}ac^{-1}db(a^{-1}c+b^{-1}d)(a^{-1}+b^{-1}c^{-1}d)}{(ab^{-1}c^{-1}+d^{-1})(ab^{-1}+cd^{-1})}} \end{aligned}$$

ここで、根号内の分母分子にを掛ける。

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{abc^{-1}d^{-1}abcd^{-1}abc^{-1}d}{ac^{-1}bd^{-1}abcd^{-1}}} bb = \sqrt[4]{a^1b^3c^{-1}d^1}$$

同様に、

$$z_2 = \sqrt[4]{\frac{(b^{-1}d+a^{-1}c)(ab^{-1}d+c)(a^{-1}bc+d)}{(a^{-1}cd^{-1}+b^{-1})(ab^{-1}c^{-1}+d^{-1})(ab^{-1}+cd^{-1})}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[4]{\frac{a^{-1}b^{-1}cdab^{-1}cda^{-1}bcd}{a^{-1}cb^{-1}dab^{-1}cd}} dd = \sqrt[4]{a^{-1}bcd^3} \\ z_3 &= \sqrt[4]{\frac{(a^{-1}+b^{-1}c^{-1}d)(a^{-1}bd^{-1}+c^{-1})(a^{-1}b+c^{-1}d)}{(a^{-1}cd^{-1}+b^{-1})(ab^{-1}c^{-1}+d^{-1})(ab^{-1}+cd^{-1})}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{a^{-1}b^{-1}c^{-1}da^{-1}bc^{-1}d^{-1}a^{-1}bc^{-1}d}{a^{-1}b^{-1}c^{-1}da^{-1}bc^{-1}d^{-1}}} a^{-1}bc^{-1}d \\ &= \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2} \end{aligned}$$

(3) Harkerの式は次のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ a^{-1} & c^{-1} & 1 & 0 \\ b^{-1} & d^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ から、}$$

$$\begin{bmatrix} x_1+ax_3+bx_4 \\ x_2+cx_3+dx_4 \\ a^{-1}x_1+c^{-1}x_2+x_3 \\ b^{-1}x_1+d^{-1}x_2+x_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$(2-k)x_1+ax_3+bx_4=0$$

$$(2-k)x_2+cx_3+dx_4=0$$

$$a^{-1}x_1+c^{-1}x_2+(2-k)x_3=0$$

$$b^{-1}x_1+d^{-1}x_2+(2-k)x_4=0$$

これらの式は、同次式であり、どれかの変数を固定しなければならない。 $x_4=1$ として、連立方程式を解くと、

$$x_1 = -\frac{ac^{-1}d+b((2-k)^2-1)}{(2-k)((2-k)^2-2)},$$

$$x_2 = -\frac{a^{-1}bc+d((2-k)^2-1)}{(2-k)((2-k)^2-2)} \text{ および}$$

$$x_3 = \frac{a^{-1}b+c^{-1}d}{(2-k)^2-2} \text{ を得る。}$$

(4) 固有値 $\lambda = 2 + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}}$ を k と
して、 x_1, x_2, x_3 を求める。

$$x_1 = -\frac{ac^{-1}d+b((2-k)^2-1)}{(2-k)((2-k)^2-2)}$$

$$= \frac{ac^{-1}d+b(\sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + 1)}{(\sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}})(\sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt[4]{a^3b^3c^{-4}d^4} + \sqrt[4]{a^2b^2c^{-2}d^2} + \sqrt[4]{a^{-2}b^5c^2d^{-2}} + \sqrt[4]{a^0b^3c^0d^0}}{\sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}}} \\
 &= \sqrt[4]{a^1b^3c^{-1}d^1} \\
 &\times \frac{(\sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}})}{\sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}}} \\
 &= z_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{a^{-1}bc + d((2-k)^2 - 1)}{(2-k)((2-k)^2 - 2)} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{a^{-4}b^4c^4d^0} + \sqrt[4]{a^2b^{-2}c^{-2}d^6} + \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^2d^2} + \sqrt[4]{a^0b^0c^0d^4}}{\sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{a^{-4}b^4c^4d^0} + \sqrt[4]{a^2b^{-2}c^{-2}d^6} + \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^2d^2} + \sqrt[4]{a^0b^0c^0d^4}}{\sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}}} \\
 &= \sqrt[4]{a^{-1}bcd^3} \\
 &\times \frac{\sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}} + \sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1}}{\sqrt[4]{a^3b^{-3}c^{-3}d^3} + \sqrt[4]{a^{-1}b^1c^1d^{-1}} + \sqrt[4]{a^1b^{-1}c^{-1}d^1} + \sqrt[4]{a^{-3}b^3c^3d^{-3}}} \\
 &= \sqrt[4]{a^{-1}bcd^3} \\
 &= z_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{a^{-1}b + c^{-1}d}{(2-k)^2 - 2} = \frac{\sqrt[4]{a^{-4}b^4c^0d^0} + \sqrt[4]{a^0b^0c^{-4}d^4}}{\sqrt[4]{a^2b^{-2}c^{-2}d^2} + \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^2d^{-2}}} \\
 &= \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2} \frac{\sqrt[4]{a^{-2}b^2c^2d^{-2}} + \sqrt[4]{a^2b^{-2}c^{-2}d^2}}{\sqrt[4]{a^2b^{-2}c^{-2}d^2} + \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^2d^{-2}}} \\
 &= \sqrt[4]{a^{-2}b^2c^{-2}d^2} \\
 &= z_3
 \end{aligned}$$

(5) UW の幾何平均をとる。 z_1 および z_3 を整理すると、

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \sqrt[3]{\frac{(a+bd^{-1}f+bc^{-1}e^{-1})(ade^{-1}f^{-1}+bcd^{-1}f)(cd^{-1}ef+1+a^{-1}bd^{-1}f)bc^{-1}de^{-1}adf^{-1}}{a^{-1}c^{-1}e^{-1}f^{-1}(ab^{-1}f^{-1}+c^{-1}e^{-1}f^{-1}+d^{-1})(a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1})(a^{-1}bd^{-1}f+cd^{-1}ef+1)f^{-1}}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{(ab^{-1}df^{-1}+1+c^{-1}de^{-1}f^{-1})(ade^{-1}f^{-1}+bcd^{-1}f)bc^{-1}de^{-1}adf^{-1}}{a^{-1}c^{-1}e^{-1}f^{-1}(ab^{-1}df^{-1}+c^{-1}de^{-1}f^{-1}+1)(a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1})f^{-1}d^{-1}}} \\
 &= \sqrt[3]{(ade^{-1}f^{-1}+bcd^{-1}f)(a^{-1}be^{-1}d^{-1}+acb^{-1}f^{-1})^{-1}a^2b^2d^2f^2}
 \end{aligned}$$

同様に、

$$z_3 = \sqrt{(a^{-1}d^{-1}ef+b^{-1}c^{-1}df^{-1})(a^{-1}c^{-1}e^{-1}f^{-1}+b^{-1}cd^{-1}e^{-1})^{-1}c^{-2}d^2ef^2}$$

を得る。

(6) z_2/z_4 の近似 UW

$$\begin{aligned}
 \frac{z_2}{z_4} &= \left(\frac{\sqrt[4]{a^{-2}b^{-2}cde^{-1}}\sqrt[4]{a^{-1}b^2c^2d^{-2}f^{-1}}\sqrt[4]{a^{-1}bcde^{-1}}\sqrt[4]{a^{-1}bcd^0e^2}}{\sqrt[4]{a^{-2}b^{-2}c^{-1}d^{-1}e^{-1}f}\sqrt[4]{ab^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}f}\sqrt[4]{ab^{-1}c^2d^{-1}e^{-2}f}\sqrt[4]{ab^{-1}c^{-1}d^1e^{-1}f^2}} \right)^{1/5} \\
 &= (a^{-1}bcdef^{-1}\sqrt[3]{a^{-2}b^2c^2d^2ef^{-2}})^{1/5}
 \end{aligned}$$

$$= a^{-1}bcdef^{-1}$$

(7) Harkerの行列から固有ベクトルの算出

$$\begin{bmatrix} 3 & a & 0 & b & 0 \\ a^{-1} & 2 & c & 0 & d \\ 0 & c^{-1} & 3 & e & 0 \\ b^{-1} & 0 & e^{-1} & 2 & f \\ 0 & d^{-1} & 0 & f^{-1} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{から, } \begin{cases} (3-k)x_1 + ax_2 + bx_4 = 0 \\ a^{-1}x_1 + (2-k)x_2 + cx_3 = -d \\ c^{-1}x_2 + (3-k)x_3 + ex_4 = 0 \\ b^{-1}x_1 + e^{-1}x_3 + (2-k)x_4 = -f \\ d^{-1}x_2 + f^{-1}x_4 = k-3 \end{cases}$$

1行目の式をベースにする。

$$\begin{aligned}
 \{1 - (3-k)(2-k)\}x_1 + acx_3 - b(2-k)x_4 &= -ad \\
 -(3-k)c^{-1}x_1 + (3-k)ax_3 + (ae - bc^{-1})x_4 &= 0 \\
 b^{-1}x_1 + e^{-1}x_3 + (2-k)x_4 &= -f \\
 -(3-k)d^{-1}x_1 + (af^{-1} - bd^{-1})x_4 &= a(k-3) \\
 A = (3-k)a\{2d^{-1} - ab^{-1}f^{-1} - c^{-1}e^{-1}f^{-1} - (3-k)(2-k)d^{-1}\}
 \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{(3-k)a\{2a - bd^{-1}f - bc^{-1}e^{-1} - (3-k)(2-k)a\}}{A} \\
 x_2 &= \frac{(3-k)^2a\{3 + c^{-1}def^{-1} - c^{-1}de^{-1}f^{-1} - (3-k)(2-k)\}}{A} \\
 x_3 &= \frac{(3-k)a\{2c^{-1} - ab^{-1}e^{-1}d^{-1}ef - (3-k)(2-k)c^{-1}\}}{A} \\
 x_4 &= \frac{(3-k)^2a(ab^{-1} + c^{-1}e^{-1} + d^{-1}f)}{A}
 \end{aligned}$$

が得られる。

参考文献

- Ozaki, T., Sugiura, S. and Kinoshita, E (2009), "Dissolution of the dilemma or circulation problem using the Analytic Network Process," *Proceedings of the Tenth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process 2009*: Pittsburgh, PA.
- Ozaki, T., ITOH, A., Sugiura, S. and Kinoshita, E (2009), "Dissolution of the dilemma or circulation problem using the Analytic Network Process," *Proceedings of 3th Japanese Symposium on the AHP 2009*: Tokyo, 50.

- Harker, P.T. and Vargas, L.G. (1987), “Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process”, *Mathematical Modeling* 1987: 9; 838–848.
- Ozaki, T. and Miwa, K (2009) “An approximation process of missing value in Imperfect Evaluation Matrix.” *Proceedings of 3th Japanese Symposium on the AHP 2009*: Tokyo, 45.
- Nishizawa, K (2005) “Estimation of Unknown Comparisons in Incomplete AHP”, *Report of the Research Institute of Industrial Technology*, Nihon University 2005: 77; 1–9.